This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, иринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.

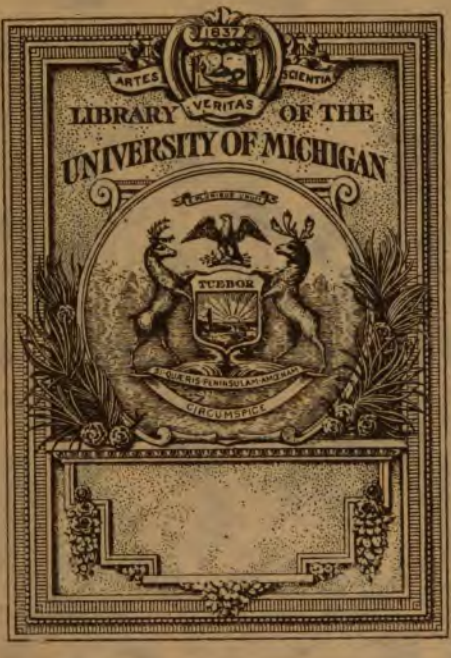
- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.

- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.

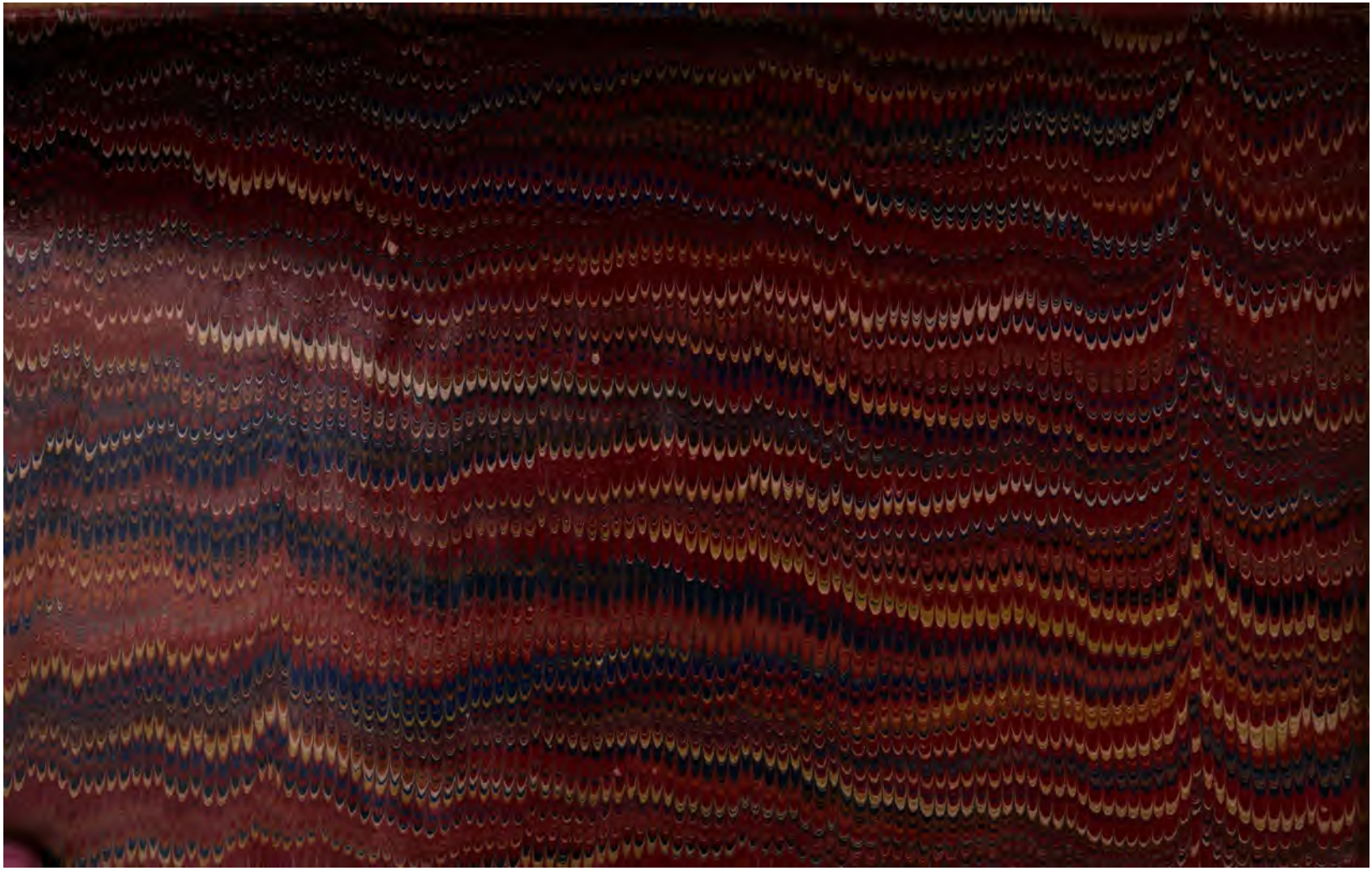
- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



QA
471
.I11

Alexander Ziwet

Aroshenko, Semen Petrovich

3.4

НАЧАЛА

Александръ Цивет

НОВОЙ ГЕОМЕТРІИ

С. Ярошенко.

ОДЕССА
ТИПОГРАФІЯ УЛЬРИХА и ШУЛЬЦЕ.
1873.

Изъ IX и X томовъ Записокъ Императорскаго Новороссійскаго университета.

Prof. Alex. Zivet
1-31-1923

Stacks

6-24-42, HRJ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Введеніе 1

ГЛАВА I.

Ангармоническое отношеніе.

§ 1 — Опредѣленіе положенія элементовъ ряда точекъ. Понятіе объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ точекъ. Различныя его формы 7

§ 2 — Измѣненіе величины ангармоническаго отношенія при движеніи одного изъ элементовъ и при перестановкѣ, входящихъ въ него элементовъ 12

§ 3 — Опредѣленіе положенія элементовъ пучка лучей и пучка плоскостей. Ангармоническое отношеніе четырехъ лучей и четырехъ плоскостей 16

Геометрическія свойства ангармоническаго отношенія.

§ 4 — Перспективная зависимость между рядомъ точекъ и пучкомъ лучей 18

§ 5 — Перспективная зависимость между рядомъ точекъ, пучкомъ лучей и пучкомъ плоскостей 21

§ 6 — Измѣненіе величины и различныя формы ангармоническаго отношенія пучка лучей и пучка плоскостей 24

Гармоническое отношеніе.

§ 7 — Гармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда. Условія, что четыре точки составляютъ гармоническій рядъ 28

§ 8 — Гармоническое отношеніе пучка лучей и пучка плоскостей. Условія что четыре элемента этихъ образовъ составляютъ гармоническій пучекъ 32

§ 9 — Гармоническія свойства полнаго четыреугольника и полнаго четырехсторонника. Построеніе четвертаго гармоническаго элемента 34

416665

стр

ГЛАВА II.

Проэктивные образы.

§ 10 — Понятіе о проэктивныхъ образахъ. Общія условія проэктивной зависимости. Равенство ангармоническихъ отношеній четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ проэктивныхъ образовъ. Другое опредѣленіе проэктивной зависимости . . 40

§ 11 — Различныя формы условій проэктивной зависимости. Противуположныя точки, лучи и плоскости 46

§ 12 — Подобные ряды точекъ. Различныя формы условій подобія . 55

Геометрическія свойства проэктивныхъ образовъ.

§ 13 — Перспективное положеніе двухъ образовъ. Приведеніе проэктивныхъ образовъ въ перспективное положеніе. Нѣкоторыя свойства проэктивныхъ образовъ. Теорема Дезарга . 59

§ 14 — Построеніе соотвѣтственныхъ элементовъ проэктивныхъ образовъ 73

§ 15 — Свойства проэктивныхъ рядовъ точекъ. Особенныя точки. Двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ . . 77

§ 16 — Свойства проэктивныхъ пучковъ. Особенные лучи. Двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ 84

Проэктивныя ряды точекъ на одной прямой, проэктивные пучки лучей съ общимъ центромъ, проэктивные пучки плоскостей съ общей осью.

§ 17 — Проэктивные ряды точекъ на одной прямой. Двойныя точки . 89

§ 18 — Проэктивные пучки лучей съ общимъ центромъ. Двойные лучи 94

§ 19 — Способъ Штейнера для построенія двойныхъ точекъ и двойныхъ лучей 98

Инволюція.

§ 20 — Рядъ точекъ въ инволюціи. Общія условія инволюціи. Двойныя точки 101

§ 21 — Простѣйшія условія инволюціи точекъ. Различныя роды инволюціи. Построеніе сопряженныхъ точекъ. Инволюція, опредѣляемая четырьмя точками на прямой 106

§ 22 — Инволюція шести точекъ. Различныя формы условій для шести точекъ въ инволюціи 113

§ 23 — Пучекъ лучей въ инволюціи Общія условія инволюціи лучей. Двойные лучи 119

§ 24 — Простѣйшія условія инволюціи лучей. Различные роды инволюціи. Инволюція, опредѣляемая четырьмя лучами . . . 122

§ 25 — Инволюція шести лучей. Различныя формы условій для шести лучей въ инволюціи 124

§ 26 — Система равныхъ ангармоническихъ отношеній . . . 126

стр

Инволюціонныя свойства полнаго четыреугольника и четырехсторонника. Основныя предложенія теоріи трансверсалей.

§ 27 — Инволюціонныя свойства полнаго четыреугольника и четырехсторонника 131
§ 28 — Основныя предложенія теоріи трансверсалей. Теоремы Менелая и Чева 135

ГЛАВА III.

Гармоническія центры, оси и плоскости.

§ 29 — Понятіе о гармоническихъ центрахъ различныхъ порядковъ. Зависимость между ними при одномъ и томъ-же и при разныхъ полюсахъ Случай когда нѣсколько точекъ системы совпадаютъ въ одну 140
§ 30 — Проэктивная зависимость гармоническихъ центровъ, осей и плоскостей 155
§ 31 — Свойства гармоническихъ осей 160

ГЛАВА IV.

Многозначные образы.

§ 32 — n — m — значная зависимость основныхъ геометрическихъ образовъ. Двойные элементы 162
§ 33 — Одно — n — значная зависимость. Двойные элементы. Ангармоническія свойства этихъ образовъ. Одно — дву — значные образы 166
§ 34 — m — n — значная групповая зависимость. Двойные элементы. Ангармоническія свойства этихъ образовъ. Образы, находящіеся въ попарной зависимости 174

Инволюція n-го порядка.

§ 35 — Инволюція точекъ. Двойныя точки. Проэктивныя инволюціи. Инволюція лучей и плоскостей пучка 186

ВВЕДЕНІЕ.

Въ Новой Геометріи разсматриваются, какъ основные, слѣдующіе три геометрическіе образа: **рядъ точекъ на прямой** (gerade Gebilde, Punktreihe), **пучекъ лучей** (faisceau, Strahlenbüschel) и **пучекъ плоскостей** (Ebenenbüschel).

Рядомъ точекъ на прямой или просто рядомъ точекъ называютъ систему точекъ, лежащихъ на одной безконечной прямой.

Пучкомъ лучей называютъ систему безконечныхъ прямыхъ линій, лежащихъ въ одной плоскости и проходящихъ черезъ одну и ту-же точку; каждую изъ этихъ прямыхъ называютъ **лучемъ пучка**, а точку общаго пересѣченія лучей — **центромъ пучка**.

Пучкомъ плоскостей называютъ систему безконечныхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ одну и ту-же прямую линію — **ось пучка**.

Точки — ряда точекъ, лучи — пучка лучей и плоскости — пучка плоскостей суть элементы этихъ трехъ геометрическихъ образовъ; элементы каждаго образа предполагаются связанными между собою неизмѣняемымъ образомъ.

Устанавливая между элементами пары этихъ образовъ извѣстнаго рода зависимость, мы можемъ представить всѣ геометрическія мѣста, какъ мѣста пересѣченія соотвѣт-

ственныхъ элементовъ двухъ образовъ или какъ мѣста, огибаемыя линіями, соединяющими соотвѣтственные элементы двухъ образовъ.

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, мы можемъ опредѣлить Новую Геометрію, какъ ученіе о геометрическихъ мѣстахъ, разсматриваемыхъ какъ мѣста, опредѣляемыя помощію трехъ геометрическихъ образовъ: ряда точекъ, пучка лучей и пучка плоскостей. Само собою разумѣется, что такому изученію геометрическихъ мѣстъ должно предшествовать изученіе свойствъ и взаимной зависимости названныхъ выше образовъ т. е. ученіе о началахъ Новой Геометріи. Прежде чѣмъ приступимъ къ изложенію этихъ началъ, мы считаемъ нужнымъ сказать нѣсколько словъ о тѣхъ обозначеніяхъ, которыя приняты въ Новой Геометріи, именно о такъ называемомъ правилѣ знаковъ, предложенномъ впервые Мебіусомъ *).

Если на прямой линіи даны двѣ точки a и b, то мы будемъ обозначать отрѣзокъ прямой, заключающійся между точками a и b, черезъ ab или черезъ ba, смотря потому будетъ ли принята за начало счета точка a или точка b. Слѣдовательно отрѣзки ab и ba одинаковы по величинѣ и противны по знаку, поэтому

$$ab = -ba \quad \text{или} \quad ab + ba = 0.$$

Предположимъ теперь, что на прямой линіи даны три точки a, b, c; при этомъ могутъ имѣть мѣсто три слѣдующія положенія: b лежитъ между a и c, на продолже-

*) Der barycentrische Calcul ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet von Aug. Ferd. Möbius. — Leipzig 1827.

ніи отрѣзка ac или наконецъ на предложеніи отрѣзка ca. Легко убѣдиться, что во всѣхъ этихъ случаяхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$ab + bc + ca = 0.^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если точка b лежитъ между a и c, то очевидно, что

$$ab + bc = ac,$$

откуда, замѣчая, что $ac = -ca$, найдемъ равенство (1).

Во второмъ случаѣ т. е. когда точки расположены въ послѣдовательности a, c, b, мы въ силу предыдущаго, будемъ имѣть:

$$ac + cb + ba = 0,$$

откуда, замѣняя ac, cb, ba черезъ $-ca$, $-bc$, $-ab$, получимъ равенство (1).

Наконецъ, если точки расположены въ послѣдовательности b, a, c, то тогда будемъ имѣть:

$$ba + ac + cb = 0,$$

откуда, замѣняя ba, ac, cb чрезъ $-ab$, $-ca$, $-bc$, получимъ равенство (1).

Итакъ, какова бы ни была послѣдовательность трехъ точекъ a, b, c, лежащихъ на одной прямой, всегда

$$ab + bc + ca = 0.$$

Это равенство можетъ быть представлено еще въ двухъ слѣдующихъ формахъ:

$$ab + bc = ac \quad \text{и} \quad ab - ac = cb.$$

Соотношеніе (1), существующее между отрѣзками, образуемыми тремя точками на одной прямой, можетъ быть распространено и на случай сколькихъ угодно точекъ на одной прямой т. е. можно показать, что если на прямой линіи даны точки a, b, c, d, ... k, l, то, каково-бы ни было ихъ положеніе, всегда имѣетъ мѣсто равенство

$$ab + bc + cd + \ldots\ldots + kl + la = 0. \ldots\ldots (2)$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: допустимъ, что равенство (2) справедливо для m точекъ a, b, c, d, ... k т. е., что

$$ab + bc + cd + \ldots\ldots + ka = 0$$

и докажемъ, что оно будетъ имѣть мѣсто и для $m+1$ точекъ.

Возьмемъ на прямой, на которой находятся точки a, b, c, d, ... k, еще одну точку l, тогда для трехъ точекъ a, k, l будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$ak + kl + la = 0.$$

Складывая послѣднія два равенства и замѣчая, что $ak + ka = 0$, получимъ равенство (2).

Итакъ, если равенство (2) справедливо для m точекъ, то оно справедливо и для $m+1$ точекъ; но мы видѣли, что оно имѣетъ мѣсто для трехъ точекъ, слѣдовательно оно справедливо для четырехъ, пяти и т. д. точекъ.

Равенство (2) можетъ быть представлено еще въ слѣдующей формѣ:

$$ab + bc + cd + \ldots\ldots + kl = al.$$

Предположимъ теперь (фиг. 1), что на плоскости даны двѣ прямыя A и B, выходящія изъ точки O т. е., имѣющія направленія OA и OB, тогда мы будемъ обозначать уголъ между этими прямыми черезъ (AB) или черезъ (BA), смотря потому будетъ ли онъ отсчитываться по направленію отъ A къ B или-же по направленію отъ B къ A. Принимая за начало счета линію A, выраженіе (AB) обозначитъ два угла, ибо прямая, выходящая изъ точки O, можетъ перейти изъ положенія A въ положеніе B, двигаясь по двумъ противуположнымъ направленіямъ и слѣдовательно (AB) обозначитъ два угла θ и ω; оба эти угла опредѣляютъ одно и тоже положеніе линій A и B, поэтому мы будемъ разсматривать эти углы какъ равные и такъ какъ они противуположны по направленію, то слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\theta = -\omega$$

или, такъ какъ $\omega = 360 - \theta$, то

$$\theta = \theta - 360 \quad \text{или} \quad \theta = \theta + 360.$$

Поэтому, мы будемъ считать уголъ между двумя прямыми не измѣнившимся, если онъ увеличенъ или уменшенъ на 360°.

Въ силу принятаго обозначенія два угла (AB) и (BA) одинаковы по величинѣ и различны по знакамъ, поэтому

$$(AB) = -(BA) \quad \text{и} \quad (AB) + (BA) = 0.$$

Если изъ точки O выходятъ три прямыя A, B, C, лежащія въ одной плоскости, то легко убѣдиться, подобно тому, какъ для случая трехъ точекъ на одной прямой, что всегда будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$(AB)+(BC)+(CA)=0,$$

которое можетъ быть также представлено въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

$$(AB)+(BC)=(AC) \quad \text{или} \quad (AB)-(AC)=(CB)$$

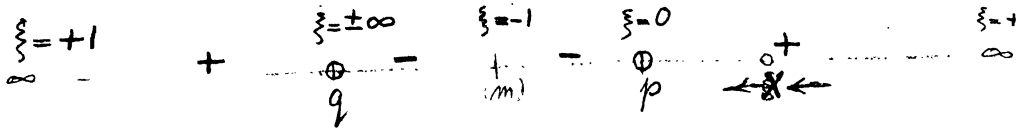
Если на плоскости дано нѣсколько линій A, B, C, D, ... K, L, выходящихъ изъ одной точки, то, употребляя тотъ-же пріемъ, который былъ употребленъ для доказательства равенства (2), легко убѣдиться, что всегда будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$(AB)+(BC)+(CD)+ \ldots\ldots +(KL)+(LA)=0$$

или, что тоже

$$(AB)+(BC)+(CD)+ \ldots\ldots +(KL)=(AL)$$

Все сказанное объ углахъ между прямыми на плоскости, выходящими изъ одной точки, можетъ быть примѣнено и къ угламъ между плоскостями, выходящими изъ одной прямой. Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ провести плоскость перпендикулярно къ прямой общей всѣмъ плоскостямъ пучка, тогда, полученные въ сѣченіи, плоскіе углы будутъ измѣрять соотвѣтственные углы между плоскостями.



ГЛАВА I.

Ангармоническое отношеніе.

§ 1. Положеніе всякой точки ряда точекъ на прямой можетъ быть опредѣлено разстояніемъ этой точки отъ нѣкоторой постоянной точки на той-же прямой, взятымъ съ приличнымъ знакомъ. Но можно также опредѣлять положеніе точки на прямой отношеніемъ разстояній этой точки отъ двухъ постоянныхъ точекъ той-же прямой; такъ, называя постоянныя точки черезъ p и q, положеніе всякой точки x будетъ опредѣлено, если даны величина и знакъ отношенія $\frac{px}{qx}$.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, посмотримъ какимъ образомъ измѣняется отношеніе $\frac{px}{qx} = \xi$ при движеніи точки x по прямой pq. — Предположимъ, что точка x находится на продолженіи отрѣзка qp и начала двигаться изъ безконечнаго разстоянія по направленію къ p; тогда, представивъ ξ въ формѣ $\frac{pq + qx}{qx} = 1 + \frac{pq}{qx}$, мы видимъ, что для начальнаго положенія точки x отрѣзокъ $qx = \infty$ и слѣдовательно $\xi = 1$; затѣмъ при движеніи точки x до p отрѣзки px и qx будутъ одинаковаго знака и слѣдовательно отношеніе ξ, измѣняясь непрерывно, будетъ оста-

ваться величиной положительной и когда x совпадетъ съ p то $\xi = 0$, ибо тогда $px = 0$. Когда точка x будетъ двигаться отъ p до q, то отрѣзки px и qx будутъ имѣть разные знаки и слѣдавательно ξ, измѣняясь непрерывно, будетъ оставаться величиной отрицательной и приметъ безконечное значеніе, когда x совпадетъ съ q, ибо тогда $qx = 0$. Наконецъ, когда точка x, продолжая двигаться по тому-же направленію, будетъ находиться на продолженіи отрѣзка pq, то px и qx будутъ имѣть одинакіе знаки и слѣдовательно отношеніе ξ, измѣняясь непрерывно, будетъ величиной положительной и приметъ значеніе $+1$, когда точка x удалится въ безконечность. — Итакъ, при движеніи точки x отношеніе $\xi = \frac{px}{qx}$ принимаетъ всѣ положительныя и отрицательныя значенія отъ 0 до $\pm\infty$ и при томъ каждое по одному разу, исключая только тотъ случай, когда точка x будетъ находиться въ безконечности съ той или съ другой стороны прямой; поэтому, обратно, каждому значенію ξ соотвѣтствуетъ одно опредѣленное положеніе точки x и только въ одномъ случаѣ, именно при $\xi = 1$, положеніе точки x становится сомнительнымъ, тогда x удалится въ безконечность и можетъ находиться съ той или съ другой стороны прямой. Поэтому мы будемъ принимать, что на прямой линіи существуетъ только одна **безконечно-удаленная точка** и будемъ представлять себѣ, что она лежитъ какъ съ одной такъ и съ другой стороны прямой. При такомъ предположеніи мы вправѣ заключить, что положеніе точки x вполнѣ опредѣляется отношеніемъ

$$\frac{px}{qx} = \xi.$$

Впрочемъ въ справедливости этого предложенія можно

убѣдится еще слѣдующимъ образомъ. Предположимъ, что на прямой pq кромѣ точки x существуетъ еще другая точка y, для которой отношеніе

$$\frac{py}{qy} = \xi.$$

Приравнивая два выраженія для ξ, будемъ имѣть

$$\frac{px}{qx} = \frac{py}{qy}$$

откуда, замѣняя py, qy и $px - qx$ соотвѣтственно черезъ $px + xy$, $qx + xy$ и pq, найдемъ

$$pq \cdot xy = 0.$$

Откуда, замѣчая, что pq не можетъ быть нулемъ, получимъ равенство $xy = 0$, которое показываетъ, что точка y совпадаетъ съ точкой x.

Если даны четыре точки a, b, c, d ряда точекъ на прямой, то, принявъ точки a и b за постоянныя, положеніе точекъ c и d опредѣлится отношеніями:

$$\frac{ac}{bc}, \quad \frac{ad}{bd};$$

частное этихъ двухъ отношеній называютъ **ангармоническимъ** или **сложнымъ отношеніемъ** (rapport ou fonction anharmonique *), Doppelschnittverhältniss, ratio bissec-

*) *Chasles* — Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la géometrie moderne. — Bruxelles, 1837, p. 34. Русскій переводъ подъ заглавіемъ: «Историческій обзоръ происхожденія и развитія геометрическихъ методовъ» стр. 38. (См. Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ т. V, выпускъ 2-й — 1871 г.)

tionalis *), Doppelverhältniss **) четырехъ точекъ a, b, c, d и обозначаютъ его для краткости черезъ $(abcd)$, такъ что

$$(ab\,cd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Точки a и b, принимаемыя за начала отрѣзковъ, разсматриваются какъ основная пара точекъ, а двѣ другія точки c и d — какъ пара сопряженная съ первою и слѣдовательно для составленія ангармоническаго отношенія $(ab\,cd)$ нужно взять простыя отношенія разстояній точекъ первой пары до каждой изъ точекъ второй пары т. е. $\frac{ac}{bc}$ и $\frac{ad}{bd}$ и раздѣлить первое отношеніе на второе.

Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ можетъ быть представлено и въ другой формѣ, смотря по тому какимъ образомъ будетъ опредѣляться положеніе точекъ ряда.

Предположимъ, что положеніе точекъ a, b, c, d опредѣляется ихъ разстояніями отъ нѣкоторой постоянной точки p, лежащей на одной прямой съ точками a, b, c, d. Тогда, замѣчая, что

$$ac = pc - pa, \quad bc = pc - pb, \quad ad = pd - pa, \quad bd = pd - pb$$

и полагая для краткости

$$pa = \mathbf{a}, \quad pb = \mathbf{b}, \quad pc = \mathbf{c}, \quad pd = \mathbf{d},$$

---

*) *Möbius* — Der barycentrische Calcul. — s. 244.

**) *Steiner* — Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. — Berlin, 1832, s. 7.

будемъ имѣть

$$(ab\,cd) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Предположимъ теперь, что положеніе точекъ a, b, c, d ряда опредѣляется отношеніями ихъ разстояній отъ двухъ постоянныхъ точекъ p и q, лежащихъ на той-же прямой и найдемъ длину отрѣзка ac помощію отношеній $\frac{pa}{qa}$ и $\frac{pc}{qc}$. Полагая для краткости

$$\frac{pa}{qa} = \alpha, \qquad \frac{pc}{qc} = \gamma$$

и замѣчая, что

$$qa = pa - pq, \qquad qc = pc - pq,$$

найдемъ

$$pa = \frac{\alpha}{\alpha-1} pq, \qquad pc = \frac{\gamma}{\gamma-1} pq$$

и такъ какъ $ac = pc - pa$, то слѣдовательно будемъ имѣть

$$ac = \frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-1)(\gamma-1)} pq.$$

Поступая подобнымъ же образомъ и полагая

$$\frac{pb}{qb} = \beta, \quad \frac{pd}{qd} = \delta,$$

найдемъ

$$bc = \frac{\beta-\gamma}{(\beta-1)(\gamma-1)}\,pq, \qquad ad = \frac{\alpha-\delta}{(\alpha-1)(\delta-1)}\,pq,$$

$$bd = \frac{\beta-\delta}{(\beta-1)(\delta-1)}\,pq$$

и слѣдовательно

$$\frac{ac}{bc} = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-1)}{(\beta-\gamma)(\alpha-1)}, \qquad \frac{ad}{bd} = \frac{(\alpha-\delta)(\beta-1)}{(\beta-\delta)(\alpha-1)},$$

откуда

$$(ab\,cd) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

§ 2. Посмотримъ теперь какимъ образомъ можетъ измѣняться величина ангармоническаго отношенія. Очевидно, что эта величина зависитъ во первыхъ отъ относительнаго положенія точекъ и во вторыхъ отъ ихъ порядка.

Разсмотримъ сначала первый случай. Предположимъ, что на прямой L даны четыре точки a, b, c, d и посмотримъ какимъ образомъ будетъ измѣняться величина ангармоническаго отношенія съ измѣненіемъ положенія точки d. Въ этомъ случаѣ въ выраженіи

$$(ab\,cd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

будетъ измѣняться только отношеніе $\frac{ad}{bd}$, но мы видѣли въ предыдущемъ §, что когда точка d проходитъ прямую

L, то это отношеніе принимаетъ всѣ положительныя и отрицательныя значенія и притомъ каждое по одному разу, поэтому каждому положенію точки d будетъ соотвѣтствовать одна опредѣленная величина ангармоническаго отношенія $(ab\,cd)$ и наоборотъ каждой величинѣ $(ab\,cd)$ будетъ соотвѣтствовать одно опредѣленное положеніе точки d. Замѣчая-же, что отношеніе $\frac{ad}{bd}$ имѣетъ положительное значеніе, когда точка d лежитъ на продолженіи отрѣзковъ ba и ab и отрицательное, когда d лежитъ между a и b, мы видимъ, что ангармоническое отношеніе $(ab\,cd)$ будетъ имѣть въ первомъ случаѣ одинаковый знакъ съ отношеніемъ $\frac{ac}{bc}$, а во второмъ противный; — кромѣ того, такъ какъ отношеніе $\frac{ad}{bd}$ равно соотвѣтственно 0, ∞, $\frac{ac}{bc}$, когда точка d совпадаетъ съ a, b, c, то слѣдовательно $(ab\,cd) = \infty$, когда d совпадаетъ съ a, $(ab\,cd) = 0$, когда d совпадаетъ съ b и $(ab\,cd) = 1$, когда d совпадаетъ съ c.

Разсмотримъ теперь второй случай т. е. посмотримъ каковы будутъ значенія ангармоническаго отношенія $(ab\,cd)$, когда въ выраженіи $(ab\,cd)$ произведемъ всѣ возможныя перестановленія буквъ и будемъ всегда относить первыя двѣ буквы къ основной парѣ а остальныя двѣ ко второй парѣ. Число всѣхъ такимъ образомъ полученныхъ значеній ангармоническаго отношенія очевидно будетъ равно $1.2.3.4 = 24$ и легко убѣдиться, что всѣ онѣ сводятся къ шести различнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, представивъ ангармоническое отношеніе $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ въ слѣдующихъ формахъ

$$\frac{ca}{da} : \frac{cb}{db}, \qquad \frac{bd}{ad} : \frac{bc}{ac}, \qquad \frac{db}{cb} : \frac{da}{ca},$$

въ силу принятаго обозначенія получимъ равенства:

$$(ab\,cd) = (cd\,ab) = (ba\,dc) = (dc\,ba),$$

которыя выражаютъ слѣдующее предложеніе:

Величина ангармоническаго отношенія не измѣняется, когда мы переставимъ между собой пары точекъ или когда переставимъ одновременно буквы каждой пары.

Въ силу этаго предложенія всѣ 24 значенія ангармоническаго отношенія приводятся къ слѣдующимъ шести различнымъ группамъ:

$$\left.\begin{aligned}
(ab\,cd) &= (cd\,ab) = (ba\,dc) = (dc\,ba) = \lambda \\
(ac\,db) &= (db\,ac) = (ca\,bd) = (bd\,ca) = \mu \\
(ad\,bc) &= (bc\,ad) = (da\,cb) = (cb\,da) = \nu \\
(ab\,dc) &= (dc\,ab) = (ba\,cd) = (cd\,ba) = \lambda_1 = \tfrac{1}{\lambda} \\
(ac\,bd) &= (bd\,ac) = (ca\,db) = (db\,ca) = \mu_1 = \tfrac{1}{\mu} \\
(ad\,cb) &= (cb\,ad) = (da\,bc) = (bc\,da) = \nu_1 = \tfrac{1}{\nu}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Между этими шестью значеніями ангармоническаго отношенія существуетъ весьма простая зависимость; такъ, взявъ произведенія $\lambda\lambda_1$, $\mu\mu_1$, $\nu\nu_1$, получимъ:

$$\lambda\lambda_1 = 1, \quad \mu\mu_1 = 1, \quad \nu\nu_1 = 1.$$

Равенства эти показываютъ, что **произведеніе двухъ ангармоническихъ отношеній, разнящихся только мѣстами точекъ одной пары, равно единицѣ**; поэтому, если назовемъ отношенія λ, μ, ν **основными** ангармоническими отношеніями, то λ_1, μ_1, ν_1 будутъ имѣть величину обратную основнымъ.

Кромѣ того нетрудно также убѣдиться, что **сумма двухъ ангармоническихъ отношеній, разнящихся между собой мѣстами двухъ среднихъ или двухъ крайнихъ буквъ, равна единицѣ**, т. е. что

$$(ab\,cd) + (ac\,bd) = 1.$$

$$(ab\,cd) + (db\,ca) = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ ангармоническое отношеніе

$$(ab\,cd) = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}$$

и замѣнивъ, въ немъ ab черезъ $ac + cb$ и cd черезъ $cb + bd$, получимъ:

$$(ac\,bd) = \frac{ac\,.\,bd}{cb\,.\,ad} + \frac{ac + cb + bd}{ad},$$

откуда, замѣчая, что

$$\frac{ac\,.\,bd}{cb\,.\,ad} = -\left(\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}\right) = -\,(ab\,cd)$$

и

$$ac + cb + bd = ad,$$

найдемъ:

$$(ab\,cd) + (ac\,bd) = 1.$$

Что касается равенства

$$(ab\,cd) + (db\,ca) = 1,$$

то оно получается изъ предыдущаго, замѣчая, что

$$(ac\,bd) = (bd\,ac) = (db\,ca).$$

Два ангармоническія отношенія, которыхъ сумма равна единицѣ, мы будемъ называть **дополнительными**.

Пользуясь сдѣланными замѣчаніями, мы можемъ выразить величины λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 помощію одной изъ нихъ напр. λ, такъ что всѣ 24 возможныя значенія ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ сведутся къ слѣдующимъ шести:

$$\lambda,\quad \mu=\frac{1}{1-\lambda},\quad \nu=\frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \lambda_1=\frac{1}{\lambda},\quad \mu_1=1-\lambda,\quad \nu_1=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

§ 3. Перейдемъ теперь къ опредѣленію положенія элементовъ пучка лучей и пучка плоскостей.

Положеніе луча пучка лучей можетъ быть опредѣлено угломъ, который онъ составляетъ съ нѣкоторымъ постояннымъ лучемъ того-же пучка; но можно также опредѣлять положеніе каждаго луча пучка отношеніемъ синусовъ угловъ, составляемыхъ этимъ лучемъ съ двумя постоянными лучами того-же пучка, такъ, называя постоянные лучи черезъ P и Q, положеніе луча X будетъ вполнѣ опредѣлено величиною и знакомъ отношенія

$$\frac{\sin(PX)}{\sin(QX)} = \xi.$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, предположимъ, что въ томъ-же пучкѣ существуетъ еще одинъ такой лучь Y, для котораго

$$\frac{\sin(PY)}{\sin(QY)} = \xi.$$

Соединяя эти два равенства въ одно и замѣняя (PY) черезъ $(PX)+(XY)$ и (QY) черезъ $(QX)+(XY)$, получимъ равенство:

$$sin(PX-QX)=0,$$

которое не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ лучи P и Q не составляютъ одной прямой. Итакъ слѣдовательно каждому значенію отношенія $\frac{sin(PX)}{sin(QX)}$ соотвѣтствуетъ одно опредѣленное положеніе луча X и наоборотъ каждому положенію луча X отвѣчаетъ одно опредѣленное значеніе отношенія $\frac{sin(PX)}{sin(QX)}$.

Подобнымъ же образомъ опредѣляется положеніе каждой плоскости пучка плоскостей.

Если даны четыре луча A, B, C, D пучка лучей, то, принявъ лучи A и B за постоянные, положеніе лучей C и D опредѣлится отношеніями:

$$\frac{sin(AC)}{sin(BC)}, \quad \frac{sin(AD)}{sin(BD)}.$$

Частное этихъ двухъ отношеній называютъ ангармоническимъ или сложнымъ отношеніемъ четырехъ лучей A, B, C, D и обозначаютъ черезъ $(ABCD)$ или черезъ $O(ABCD)$, если O центръ пучка, такъ что

$$(ABCD) = O(ABCD) = \frac{sin(AC)}{sin(BC)} : \frac{sin(AD)}{sin(BD)},$$

при этомъ лучи A и B составляютъ основную пару лучей, а лучи C и D пару сопряженную съ основной.

Называютъ ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ плоскостей α, β, γ, δ пучка плоскостей выраженіе:

$$\frac{sin(\alpha\gamma)}{sin(\beta\gamma)} : \frac{sin(\alpha\delta)}{sin(\beta\delta)}$$

и означаютъ его черезъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Геометрическія свойства ангармоническаго отношенія.

§ 4. Укажемъ ту связь какая существуетъ между рядомъ точекъ и пучкомъ лучей. Предположимъ, что пучекъ лучей A, B, C,.... X (фиг. 2) пересѣченъ произвольной трансверсалью L, не проходящею черезъ центръ пучка, тогда на прямой L получимъ рядъ точекъ a, b, c, d,.... x, при чемъ каждая точка ряда будетъ лежать на опредѣленномъ лучѣ пучка и наоборотъ каждый лучь пучка будетъ проходить чрезъ опредѣленную точку ряда т. е. каждому элементу ряда точекъ будетъ соотвѣтствовать опредѣленный элементъ пучка и наоборотъ. Такое положеніе двухъ геометрическихъ образовъ мы будемъ называть, слѣдуя Штейнеру, **перспективнымъ**.

Итакъ слѣдовательно каждый пучекъ лучей пересѣкается какой-нибудь трансверсалью въ рядѣ точекъ и наоборотъ каждый рядъ точекъ пролагается изъ какой нибудь произвольной точки пучкомъ лучей.

Такимъ образомъ мы видимъ, что между двумя геометрическими образами рядомъ точекъ и пучкомъ лучей существуетъ извѣстнаго рода зависимость, устанавливаемая ихъ перспективнымъ положеніемъ. Постараемся теперь найти такую связь между отрѣзками ряда точекъ и углами пучка

лучей, которая-бы имѣла мѣсто каково бы ни было перспективное положеніе этихъ образовъ.

Предположимъ, что пучекъ лучей A, B, C, D (фиг. 2) пересѣченъ нѣкоторою трансверсалью L въ точкахъ a, b, c, d. Опуская изъ точки o перпендикуляръ oh на линію L и взявъ два выраженія для двойныхъ площадей треугольниковъ oac, obc, oad, obd, получимъ:

$$\begin{aligned} ac.oh &= oa.oc\ sin\ (AC) \\ bc.oh &= ob.oc\ sin\ (BC) \\ ad.oh &= oa.od\ sin\ (AD) \\ bd.oh &= ob.od\ sin\ (BD) \end{aligned}$$

откуда, раздѣляя первое равенство на второе и третье на четвертое, найдемъ:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{oa}{ob}\,\frac{sin\,(AC)}{sin\,(BC)},$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{oa}{ob}\,\frac{sin\,(AD)}{sin\,(BD)}.$$

Дѣля теперь первое изъ этихъ равенствъ на второе, получимъ слѣдующее соотношеніе между отрѣзками ряда точекъ и углами пучка лучей:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{sin\,(AC)}{sin\,(BA)} : \frac{sin\,(AD)}{sin\,(BD)},$$

которое остается справедливымъ при всякомъ перспективномъ положеніи двухъ разсматриваемыхъ образовъ, такъ какъ въ него не входятъ линіи oh, oa, ob, oc, od.

Первая часть послѣдняго равенства представляетъ ангармоническое отношеніе чстырехъ точекъ a, b, c, d —

а вторая — ангармоническое отношеніе четырехъ лучей A, B, C, D, поэтому, пользуясь принятыми обозначеніями, будемъ имѣть:

$$(ab\,cd) = (AB\,CD).$$

Равенство это выражаетъ слѣдующую основную теорему Новой Геометріи.

Если два геометрическіе образа — рядъ точекъ и пучекъ лучей — находятся въ перспективномъ положеніи, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ лучей пучка.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ:

1) Если пучекъ четырехъ лучей пересѣченъ какой нибудь трансверсалью, то ангармоническое отношеніе точекъ пересѣченія не зависитъ отъ положенія трансверсали *).

Ибо, предполагая (фиг. 2), что L и L_1 суть два различныя положенія трансверсали, a, b, c, d точки пересѣченія L съ пучкомъ A, B, C, D и a_1, b_1, c_1, d_1 точки пересѣченія L_1 съ тѣмъ-же пучкомъ, въ силу предыдущей теоремы будемъ имѣть:

$$(ab\,cd) = (AB\,CD),$$

$$(a_1b_1c_1d_1) = (ABCD),$$

откуда

$$(ab\,cd) = (a_1b_1c_1d_1).$$

---

*) Эта теорема встрѣчается впервые у Паппа въ седьмой книгѣ его Математическихъ собраній въ числѣ предложеній, назначенныхъ служить леммами для пониманія поризмъ Евклида (Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Frederico Comandino in latinum conversae et commentariis illustratae. — Pisanii 1588 и Bononiae 1660). См. Исторію Геометріи Шаля loc. cit. стр. 36 или *Chasles* — Traité de géométrie supérieure. — Paris 1852 p. XXI.

2) **Если пучекъ лучей проходитъ черезъ четыре точки ряда точекъ, то ангармоническое отношеніе пучка не зависитъ отъ положенія его центра.**

Ибо, предполагая (фиг. 3), что черезъ четыре точки a, b, c, d прямой L проведены лучи A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 изъ точекъ O и O_1, будемъ имѣть:

$$(ab\,cd) = (AB\,CD),$$

$$(ab\,cd) = (A_1B_1C_1D_1),$$

откуда

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

---

§ 5. Найдемъ теперь зависимость между рядомъ точекъ, пучкомъ лучей и пучкомъ плоскостей.

Пересѣчемъ пучекъ плоскостей α, β, γ, δ....χ (фиг. 4) прямою L, не лежащею въ одной плоскости съ осью пучка, то на линіи L получимъ рядъ точекъ a, b, c, d,....χ, при чемъ каждая плоскость пучка плоскостей будетъ проходить черезъ опредѣленную точку ряда точекъ и наоборотъ каждая точка ряда будетъ лежать на опредѣленной плоскости пучка и слѣдовательно оба образа будутъ находиться въ перспективномъ положеніи.

Итакъ каждый пучекъ плоскостей пересѣкается какой нибудь трансверсалью въ рядѣ точекъ и наоборотъ каждый рядъ точекъ пролагается изъ какой нибудь оси пучкомъ плоскостей.

Если теперь пересѣчемъ пучекъ плоскоотей α, β, γ, δ,....χ (фиг. 4) нѣкоторою плоскостію, не проходящею черезъ его ось, то въ пересѣченіи получимъ пучекъ лучей

A, B, C, D, ... X, котораго центръ O будетъ лежать на оси; при этомъ каждая плоскость пучка плоскостей будетъ проходить чрезъ опредѣленный лучь пучка лучей и наоборотъ каждый лучь пучка лучей будетъ лежать на опредѣленной плоскости пучка плоскостей и оба образа будутъ находиться въ перспективномъ положеніи.

Поэтому каждый пучекъ плоскостей пересѣкается какой нибудь плоскостью въ пучкѣ лучей и наоборотъ каждый пучекъ лучей пролагается изъ какой нибудь оси пучкомъ плоскостей.

Такимъ образомъ мы видимъ, что между рядомъ точекъ, пучкомъ лучей и пучкомъ плоскостей существуетъ перспективная зависимость; постараемся теперь выразить эту зависимвсть помощію соотношеній между отрѣзками, ряда точекъ и углами пучка плоскостей, и между углами пучка лучей и пучка плоскостей.

Пусть пучекъ плоскоскостей α, β, γ, δ (фиг. 4) пересѣченъ нѣкоторою трансверсалью L въ точкахъ a, b, c, d. Проведемъ черезъ линію L плоскость перпендикулярную къ оси пучка плоскостей, тогда въ пересѣченіи получимъ пучекъ лучей A_1, B_1, C_1, D_1, котораго углы будутъ измѣрять углы между соотвѣтственными плоскостями, поэтому будемъ имѣть:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (A_1B_1C_1D_1);$$

но пучекъ лучей A_1, B_1, C_1, D_1 и рядъ точекъ a, b, c, d находятся въ перспективномъ положеніи, поэтому

$$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd)$$

и слѣдовательно

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Равенство это показываетъ, что, **если рядъ точекъ и пучекъ плоскостей находятся въ перспективномъ положеніи, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ плоскостей пучка.**

Отсюда слѣдуетъ:

1) **Если пучекъ четырехъ плоскостей пересѣченъ какой нибудь трансверсалью, то ангармоническое отношеніе точекъ пересѣченія не зависитъ отъ положенія трансверсали.**

2) **Если пучекъ плоскостей проходитъ черезъ четыре точки ряда точекъ, то ангармоническое отношеніе пучка не зависитъ отъ положенія его оси.**

Пересѣчемъ теперь пучекъ плостей α, β, γ, δ (фиг 4) произвольною плоскостью, тогда въ пересѣченіи получимъ пучекъ лучей A, B, C, D. Проведемъ еще плоскость перпендикулярно къ оси пучка плоскостей и назовемъ лучи, полученнаго въ сѣченіи пучка, черезъ A_1, B_1, C_1, D_1, и черезъ a, b, c, d соотвѣтственно точки пересѣченія лучей A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1, тогда будемъ имѣть:

$$(ABCD) = (abcd),$$

$$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd),$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (A_1B_1C_1D_1),$$

откуда находимъ, что

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD).$$

Итакъ слѣдовательно, **если пучекъ лучей и пучекъ плоскостей находятся въ перспективномъ положеніи, то ангармоническое отношеніе четырехъ лучей пучка**

лучей равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ плоскостей пучка плоскостей.

Отсюда слѣдуетъ:

1) **Если пучекъ четырехъ плоскостей пересѣченъ какой нибудь плоскостію, то ангармоническое отношеніе четырехъ лучей пересѣченія не зависитъ отъ положенія сѣкущей плоскости.**

2) **Если пучекъ плоскостей проходитъ черезъ четыре луча пучка лучей, то ангармоническое отношеніе пучка плоскостей не зависитъ отъ положенія его оси.**

§ 6. На основаніи перспективной зависимости трехъ геометрическихъ образовъ: ряда точекъ, пучка лучей и пучка плоскостей, указанной въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, заключаемъ, что все сказанное въ § 2 объ измѣненіи величины ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ можетъ быть примѣнено какъ къ пучку лучей такъ и къ пучку плоскостей. На основаніи той-же зависимости легко показать, что ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ пучка лучей и пучка плоскостей можетъ быть представлено въ формахъ (1, 2), предложенныхъ въ § 1 для ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ ряда.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что положеніе лучей A, B, C, D пучка (фиг. 5) опредѣляется углами, которые они составляютъ съ нѣкоторымъ постояннымъ лучемъ P. Пересѣкая пучекъ лучей прямою перпендикулярною къ лучу P и называя черезъ p, a, b, c, d точки пересѣченія этой прямой съ лучами P, A, B, C, D, будемъ имѣть:

$$(AB\,CD) = (ab\,cd)$$

или, удерживая обозначенія § 1

$$(AB\,CD) = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} : \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{\mathbf{b}-\mathbf{d}},$$

но изъ чертежа видно, что

$$\mathbf{a} = pa = Op\,tg\,(PA), \qquad \mathbf{c} = pc = Op\,tg\,(PC),$$
$$\mathbf{b} = pb = Op\,tg\,(PB), \qquad \mathbf{d} = pd = Op\,tg\,(PD),$$

подставляя эти величины въ послѣднее уравненіе, получимъ для ангармоническаго отношенія четырехъ лучей пучка слѣдующее выраженіе:

$$(AB\,CD) = \frac{tg\,(PA) - tg\,(PC)}{tg\,(PB) - tg\,(PC)} : \frac{tg\,(PA) - tg\,(PD)}{tg\,(PB) - tg\,(PD)}$$

аналогичное выраженію (1).

Подобное же выраженіе можетъ быть найдено и для ангармоническаго отношенія пучка плоскостей; чтобы убѣдиться въ этомъ стоитъ только пересѣчь пучекъ плоскостей плоскостью перпендикулярною къ его оси.

Такимъ образомъ мы видимъ, что выраженіе

$$\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} : \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{\mathbf{b}-\mathbf{d}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

можетъ представлять ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ ряда точекъ, пучка лучей и пучка плоскостей, смотря потому какія значенія будутъ приписаны величинамъ **a**, **b**, **c**, **d**.

Такъ, разумѣя подъ **a**, **b**, **c**, **d** разстоянія точекъ *a*, *b*, *c*, *d* ряда отъ нѣкоторой постоянной точки того-же ряда, выраженіе (4) представитъ ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда.

Выраженіе (4) будетъ представлять ангармоническое отношеніе четырехъ лучей пучка, если подъ **a**, **b**, **c**, **d** будемъ разумѣть тангенсы угловъ, образуемыхъ этими лучами съ нѣкоторымъ постояннымъ лучемъ того-же пучка.

Наконецъ, если подъ **a**, **b**, **c**, **d** будемъ разумѣть тангенсы угловъ, составляемыхъ четырмя плоскостями пучка плоскостей съ нѣкоторой постоянной плоскостью того-же пучка, то выраженіе (4) представитъ ангармоническое отношеніе пучка плоскостей.

Найдемъ теперь выраженіе для ангармоническаго отношенія четырехъ лучей A, B, C, D пучка (фиг. 6) въ томъ случаѣ, когда ихъ положеніе будетъ опредѣляться по отношенію къ двумъ постояннымъ лучамъ P и Q. Проведемъ трансверсаль L и назовемъ черезъ p, q, a, b, c, d точки пересѣченія прямой L съ лучами P, Q, A, B, C, D, тогда, удерживая обозначенія § 1, будемъ имѣть:

$$(ABCD) = (\acute{a}b\,cd) = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}.$$

Предположимъ, что трансверсаль L проведена такимъ образомъ, что $Op = Oq$ и опустивъ изъ точки O перпендикуляръ Oh на линію L, возмемъ два выраженія для двойныхъ площадей треугольниковъ Opa и Oqa, тогда получимъ:

$$pa \,.\, Oh = Op \,.\, Oa \,.\, sin(PA),$$

$$qa \,.\, Oh = Oq \,.\, Oa \,.\, sin(QA),$$

откуда, замѣчая, что $\frac{pa}{qa} = \alpha$ и $Op = Oq$, найдемъ

$$\alpha = \frac{sin(AP)}{sin(QA)}.$$

Подобнымъ же путемъ найдемъ:

$$\beta = \frac{\sin(PB)}{\sin(QB)}, \quad \gamma = \frac{\sin(PC)}{\sin(QC)}, \quad \delta = \frac{\sin(PD)}{\sin(QD)}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что выраженіе

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

будетъ представлять ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ a, b, c, d ряда или-же четырехъ лучей A, B, C, D пучка, смотря потому будутъ ли α, β, γ, δ обозначать отношенія

$$\frac{pa}{qa}, \quad \frac{pb}{qb}, \quad \frac{pc}{qc}, \quad \frac{pd}{qd}$$

или-же отношенія

$$\frac{\sin(PA)}{\sin(QA)}, \quad \frac{\sin(PB)}{\sin(QB)}, \quad \frac{\sin(PC)}{\sin(QC)}, \quad \frac{\sin(PD)}{\sin(QD)}.$$

Выраженіе (5) представитъ ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей α_1, β_1, γ_1, δ_1 пучка, если мы будемъ опредѣлять ихъ положеніе по отношенію къ двумъ постояннымъ плоскостямъ π и σ того-же пучка и будемъ разумѣть подъ α, β, γ, δ отношенія

$$\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\sin(\sigma\alpha_1)}, \quad \frac{\sin(\pi\beta_1)}{\sin(\sigma\beta_1)}, \quad \frac{\sin(\pi\gamma_1)}{\sin(\sigma\gamma_1)}, \quad \frac{\sin(\pi\delta_1)}{\sin(\sigma\delta_1)}.$$

Гармоническое отношеніе.

§ 7. Если ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ a, b, c, d ряда равно — 1, то отношеніе называютъ **гармоническимъ** и говорятъ, что точки a, b, c, d суть четыре **гармоническія точки** или, что онѣ составляютъ **гармоническій рядъ**.

Такъ какъ ангармоническое отношеніе четырехъ гармоническихъ точекъ равно — 1, то слѣдовательно (§ 2), когда точка c лежитъ между a и b, то точка d должна находиться внѣ отрѣзка ab и наоборотъ. Поэтому одна пара точекъ раздѣляетъ отрѣзокъ между другою парою гармонически т. е. такъ, что имѣетъ мѣсто равенство:

$$(ab\,cd) = -1.$$

Поэтому называютъ точки c и d **гармонически сопряженными** точекъ a и b и наоборотъ точки a и b **гармонически сопряженными** точекъ c и d.

Между разстояніями гармонически сопряженныхъ точекъ, въ силу равенства

$$(ab\,cd) = -1,$$

имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$ac.bd + ad.bc = 0,$$

или

$$\frac{ac}{bc} + \frac{ad}{bd} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{ca}{da} + \frac{cb}{db} = 0.$$

Итакъ слѣдовательно точки a и b, по отношенію къ точкамъ c и d, играютъ ту-же роль, какъ и точки c и d по отношенію къ точкамъ a и b.

Мы видѣли, что ангармоническое отношеніе при перестановкѣ входящихъ въ него элементовъ, принимаетъ 24 значенія; посмотримъ теперь каковы будутъ эти значенія, когда четыре точки составляютъ гармоническій рядъ. Предполагая въ уравненіяхъ (3) $(ab\,cd) = -1$, будемъ имѣть:

$$(ab\,cd) = (cd\,ab) = (ba\,dc) = (dc\,ba) = (ab\,dc) = (dc\,ab) = (ba\,cd) = (cd\,ba) = -1$$

$$(ac\,db) = (db\,ac) = (ca\,bd) = (bd\,ca) = (ad\,cb) = (cb\,ad) = (da\,bc) = (bc\,da) = \frac{1}{2}$$

$$(ac\,bd) = (bd\,ac) = (ca\,db) = (db\,ca) = (ad\,bc) = (bc\,ad) = (da\,cb) = (cb\,da) = 2.$$

Отсюда видно, что, если четыре точки составляютъ гармоническій рядъ, то ихъ ангармоническое отношеніе можетъ принимать только слѣдующія три значенія: -1, $\frac{1}{2}$, 2. Кромѣ того первый рядъ равенствъ показываетъ, что гармоническое отношеніе четырехъ точекъ не измѣняется при перестановкѣ буквъ какой нибудь пары или при перестановкѣ самихъ паръ. Другія два ряда равенствъ, какъ легко видѣть, приводятся къ слѣдующимъ двумъ:

$$ab\,.\,cd = 2\,ad\,.\,cb$$

$$ab\,.\,dc = 2\,ac\,.\,db$$

и каждое изъ этихъ равенствъ выражаетъ условіе того, что четыре точки a, b, c, d составляютъ гармоническій рядъ.

Представивъ ангармоническія отношенія четырехъ точекъ въ формахъ (1) и (2), данныхъ въ § 1, получимъ слѣдующія условія того, что четыре точки a, b, c, d составляютъ гармоническій рядъ:

$$\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} : \frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{\mathbf{b}-\mathbf{d}} = -1$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} : \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta} = -1,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ представляютъ разстоянія точекъ a, b, c, d отъ нѣкоторой постоянной точки, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ обозначаютъ отношенія разстояній тѣхъ-же точекъ отъ двухъ постоянныхъ точекъ.

Послѣднія равенства приводятся къ слѣдующему виду:

$$\mathbf{ab} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d}) + \mathbf{cd} = 0 \ldots\ldots (6)$$

$$\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + \gamma\delta = 0 \ldots\ldots (7)$$

Предполагая, что постоянная точка совпадаетъ съ точкой a, будемъ имѣть $\mathbf{a} = 0$ и условіе (6) примегъ видъ:

$$2\,ac\,.\,ad = ab\,.\,ad + ab\,.\,ac\,.$$

Откуда, дѣля обѣ части на $ab\,.\,ac\,.\,ad$, получимъ равенство:

$$\frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad}, \ldots\ldots\ldots (8)$$

которое показываетъ, что, **если четыре точки состав-**

ляютъ гармоническій рядъ, то обратная величина разстояній какой нибудь точки до другой точки той-же пары есть средняя ариѳметическая обратныхъ разстояній той-же точки отъ двухъ другихъ точекъ ряда.

Предположимъ теперь, что постоянная точка совпадаетъ съ серединой m отрѣзка ab, тогда, замѣчая, что $ma = -mb$, условіе (6) приметъ видъ:

$$\overline{ma}^2 = \overline{mb}^2 = mc \cdot md \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Равенство это показываетъ, что, **если четыре точки составляютъ гармоническій рядъ, то квадратъ разстоянія середины отрѣзка точекъ одной пары отъ каждой изъ этихъ точекъ равняется произведенію разстояній той-же середины отъ точекъ другой пары.**

Изъ равенства (9) видно, что если будемъ считать точки a и b неподвижными и будемъ перемѣщать c, то точка d должна двигаться такимъ образомъ, чтобы c и d находились по одну и туже сторону точки m и чтобы произведеніе $mc \cdot md$ оставалось постояннымъ. Поэтому, 1) если точка c совпадетъ съ точкой a или b, то съ той-же точкой должно совпасть и d т. е. **если изъ четырехъ гармоническихъ точекъ пара сопряженныхъ точекъ совпадаетъ въ одну, то въ той-же точкѣ должна находиться и одна изъ двухъ другихъ сопряженныхъ точекъ,** 2) если точка c совпадаетъ съ m, то точка d лежитъ въ безконечности и слѣдовательно **двѣ какія нибудь точки, ихъ середина и безконечно-удаленная точка той-же прямой составляютъ гармоническій рядъ.**

§ 8. Называютъ пучекъ лучей A, B, C, D **гармоническимъ пучкомъ** и лучи A, B, C, D **гармоническими лучами**, если ихъ ангармоническое отношеніе равно — 1 т. е. если

$$(ABCD) = -1;$$

при этомъ лучи A и C, B и D суть **гармонически — сопряженные** и между ихъ углами имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\sin(AC)\sin(BD) + \sin(AD)\sin(BC) = 0$$

или

$$\frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} + \frac{\sin(AD)}{\sin(BD)} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin(CA)}{\sin(DA)} + \frac{\sin(CB)}{\sin(DB)} = 0.$$

Если мы примѣнимъ равенства (3) къ пучкамъ лучей и предположимъ, что лучи A, B, C, D гармоническіе, то, подобно, какъ въ предыдущемъ §, найдемъ, что гармоническое отношеніе не измѣняется при перестановкѣ лучей одной и той-же пары или при замѣнѣ одной пары лучей другою и что условіе того, что лучи A, B, C, D составляютъ гармоническій пучекъ, можетъ быть выражено однимъ изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\sin(AB)\sin(CD) = 2\sin(AD)\sin(CB),$$

$$\sin(AB)\sin(DC) = 2\sin(AC)\sin(DB).$$

Далѣе, такъ какъ ангармоническое отношеніе четырехъ лучей можетъ быть представлено въ формахъ (1 и 2), то слѣдовательно условіе того, что четыре луча составляютъ гармоническій пучекъ можетъ быть выражено

равенствами (6) или (7) предыдущаго §, если въ нихъ подъ **a**, **b**, **c**, **d** будемъ разумѣть тангенсы угловъ, составляемыхъ лучами A, B, C, D съ нѣкоторымъ постояннымъ лучемъ, а подъ α, β, γ, δ — отношенія синусовъ угловъ, составляемыхъ тѣми-же лучами съ двумя постоянными лучами. Поэтому, принимая, что постоянный лучь совпадаетъ съ лучемъ A или съ лучемъ M, дѣлящимъ пополамъ уголъ между A и B, мы найдемъ равенства:

$$\frac{2}{tg\,(AB)} = \frac{1}{tg\,(AC)} + \frac{1}{tg\,(AD)}, \ldots\ldots\ldots (8')$$

$$tg^2(MA) = tg^2(MB) = tg\,(MC).tg\,(MD), \ldots\ldots (9')$$

аналогичныя равенствамъ (8) и (9) предыдущаго §.

Обращая вниманіе на послѣднее равенство, легко убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ предложеній:

1) **Если изъ четырехъ гармоническихъ лучей пара сопряженныхъ лучей совпадаетъ въ одинъ, то съ тѣмъ-же лучемъ долженъ совпасть и одинъ изъ двухъ другихъ сопряженныхъ лучей.**

2) **Два биссектора двухъ смежныхъ угловъ и двѣ стороны послѣднихъ составляютъ гармоническій рядъ**, ибо, предполагая въ равенствѣ (9'), что лучь C совпадаетъ съ M, получимъ $tg\,(MD) = \infty$ т. е. D перпендикулярно къ M.

Обратно, **если въ гармоническомъ пучкѣ пара сопряженныхъ лучей взаимно-перпендикулярны, то они раздѣлютъ пополамъ углы, составляемыя двумя другими лучами.**

Пучекъ четырехъ плоскостей называютъ **гармоническимъ**, если ихъ ангармоническое отношеніе равно — 1.

Къ гармоническимъ пучкамъ плоскостей примѣняются всѣ выше-найденныя предложенія для гармоническихъ пучковъ лучей.

§ 9. Гармоническіе ряды и пучки встрѣчаются очень часто въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ; въ настоящемъ § мы разсмотримъ гармоническія свойства полнаго четыреугольника и полнаго четырехсторонника.

Предположимъ, что на плоскости даны четыре точки a, a_1, b, b_1, (фиг. 7) такія, что каждые три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой и проведемъ черезъ каждую пару этихъ точекъ прямыя линіи, тогда будемъ имѣть три пары прямыхъ:

ab и a_1b_1, которыя пересѣкаются въ точкѣ d
ab_1 и a_1b, » » » » d_1
aa_1 и bb_1, » » » » d_2.

Составленная такимъ образомъ фигура называется **полнымъ четыре-угольникомъ**, сторонами его будутъ линіи ab и a_1b_1, ab_1 и a_1b, aa_1 и bb_1. Точки d, d_1, d_2 пересѣченія противуположныхъ сторонъ называютъ **діагональными точками**, а линіи dd_1, dd_2, d_1d_2 **діагоналями** полнаго четыреугольника.

Замѣтивъ это, продолжимъ линію d_1d_2 до встрѣчи съ a_1b_1 и назовемъ черезъ c и c_1 точки пересѣченія d_1d_2 съ сторонами ab и a_1b_1, тогда при точкѣ d_2 получимъ пучекъ лучей $d_2 \mid a, b, c, d \mid$ который пересѣкается двумя прямыми ad и a_1d, поэтому будемъ имѣть (§ 4)

$$(a_1\, b_1\, c_1\, d) = (ab\, cd).$$

Съ другой стороны тѣже прямыя ad и $a_1 d$ пересѣкаютъ пучекъ лучей $d_1 \mid a, b, c, d \mid$ поэтому получимъ:

$$(a_1 b_1 c_1 d) = (ba\, cd)$$

и слѣдовательно

$$(ab\, cd) = (ba\, cd) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Но, какъ извѣстно (§ 2)

$$(ab\, cd)\ (ba\, cd) = 1,$$

откуда

$$(ba\, cd) = \frac{1}{(ab\, cd)},$$

поэтому равенство (10) обратится въ

$$(ab\, cd)^2 = 1,$$

и слѣдовательно

$$(ab\, cd) = +1 \quad \text{или} \quad (ab\, cd) = -1.$$

Первое изъ этихъ равенствъ не можетъ имѣть мѣста, ибо оно требуетъ чтобы совпадали точки c и d или-же точки a и b (§ 2), что въ разсматриваемомъ случаѣ очевидно не возможно, поэтому необходимо чтобы

$$(ab\, cd) = -1$$

т. е. чтобы точки a, b, c, d составляли гармоническій рядъ; а такъ какъ ангармоническое отношеніе пучковъ

$d_1 | a, b, c, d |$ и $d_2 | a, b, c, d |$ равно $(ab\,cd)$, то слѣдовательно пучки эти гармоническіе.

Называя теперь черезъ e точку пересѣченія прямыхъ dd_1 и bb_1 и замѣчая, что

$$d_1 (ab\,cd) = (b_1 b\, d_2 e)$$

и

$$d (b_1 b\, d_2 d_1) = (b_1 b\, d_2 e),$$

получимъ:

$$d (b_1 b\, d_2 d_1) = d_2 (ab\,cd)$$

и такъ какъ

$$d_1 (ab\,cd) = -1,$$

то слѣдовательно

$$d (b_1 b\, d_2 d_1) = -1,$$

т. е. пучекъ лучей $d | b, b_1\ d_1, d_2 |$ гармоническій.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію, что **во всякомъ четыреугольникѣ четыре прямыя, выходящія изъ одной и той-же діагональной точки, именно двѣ стороны четыреугольника и двѣ его діагонали, составляютъ гармоническій пучекъ.**

Предположимъ теперь, что на плоскости даны такія четыре прямыя AB, AC, DB, DF, (фиг. 8), что каждыя три изъ нихъ не проходятъ черезъ одну и ту-же точку; продолжая эти прямыя до ихъ встрѣчи получимъ фигуру, называемую **полнымъ четырехсторонникомъ**, вершинами его будутъ точки A, B, C, D, E, F, діагоналями линіи AD, BE, CF, соединяющія противуположныя вер-

шины, а діагональными точками точки G, H, I пересѣченія діагоналей.

Соединяя точку G съ A и D и разсматривая полученную фигуру какъ полный четыреугольникъ, мы, по силу предыдущей теоремы, получимъ при точкахъ A, G и D слѣдующіи три гармоническіе пучка: $A\,|\,F,\ C,\ G,\ H\,|$, $G\,|\,A,\ D,\ H,\ I\,|$, $D\,|\,F,\ C,\ G,\ I\,|$ и такъ какъ эти пучки пересѣчены діагоналями AD, BE, CF полнаго четырехстороннина, то слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(FCGI) = -1, \quad (ADHI) = -1, \quad (BEGH) = -1.$$

Равенства эти показываютъ, что во всякомъ полномъ четырехсторонникѣ четыре точки, лежащія на діагонали, именно двѣ вершины четырехсторонника и двѣ точки пересѣченія съ двумя другими діагоналями, составляютъ гармоническій рядъ.

Пользуясь свойствами полнаго четыреугольника и четырехсторонника, можно по даннымъ тремъ элементамъ какого нибудь образа найти четвертый гармоническій.

1) Предположимъ, что на прямой L (фиг. 9) даны три точки a, b, c и требуется найти четвертую точку d гармонически сопряженную съ c относительно a и b. Разсматривая точки a и b, какъ вершины полнаго четырехсторонника и c, какъ его діагональную точку, проведемъ черезъ c произвольную прямую и, взявъ на ней двѣ произвольныя точки e и f, проведемъ прямыя ae, af, be, bf, которыя и будутъ сторонами четырехсторонника, поэтому искомая точка d будетъ точка пересѣченія діагонали ef съ прямой L.

Такъ какъ по даннымъ тремъ точкамъ a, b, c можно найти только одну четвертую гармонически сопряженную съ c, то изъ предыдущаго построенія видно, что всѣ

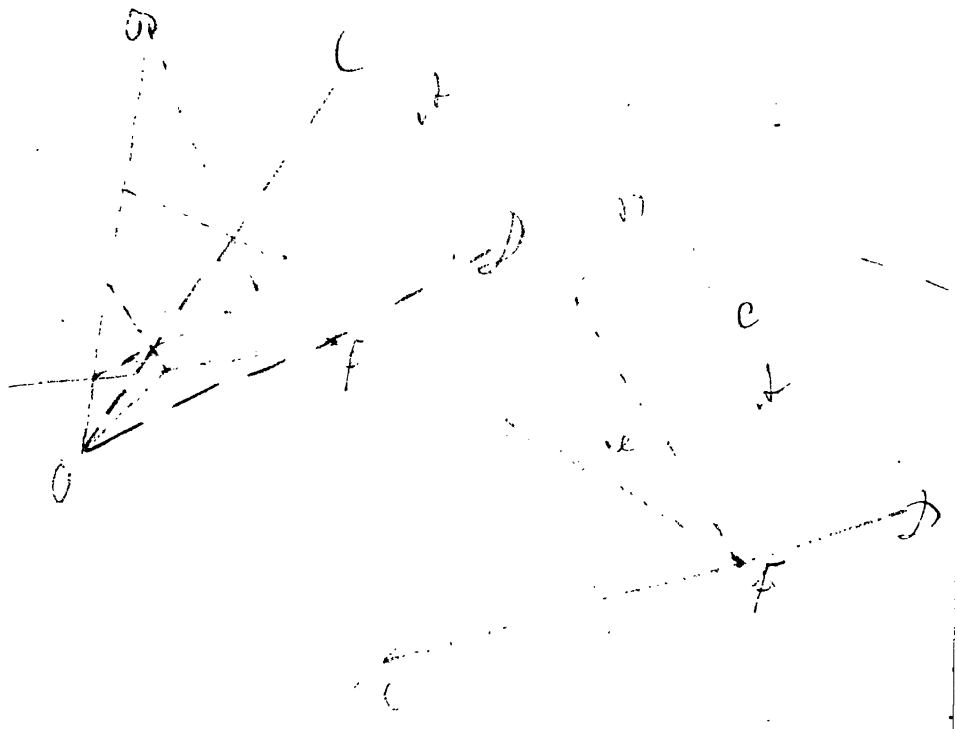
полные четырехсторонники, имѣющіе однѣ и тѣже вершины a и b и одну и ту-же діагональную точку c на прямой ab, должны имѣть на той-же прямой еще одну общую діагональную точку d.

2) Предположимъ теперь, что даны три луча OA, OB, OC (фиг. 10) и требуется найти четвертый лучь OD гармонически сопряженный съ лучемъ OC относительно OA и OB. Пользуясь перспективной зависимостью, можно рѣшить предложенный вопросъ слѣдующимъ образомъ. Пересѣчемъ пучекъ $O\,|\,A, B, C\,|$ произвольной прямой и къ тремъ точкамъ пересѣченія найдемъ четвертую гармонически сопряженную; соединяя послѣднюю точку съ центромъ O, получимъ искомый четвертый гармоническій лучь. Но можно рѣшить ту-же задачу непосредственно, пользуясь свойствомъ полнаго четыреугольника. Возьмемъ на лучѣ OC произвольную точку e и проведемъ черезъ нея двѣ прямыя ab и a_1b_1, тогда точки a, b, a_1, b_1 будутъ четыре точки, опредѣляющія полный четыреугольникъ и слѣдовательно лучь OD найдется, соединивъ точку O съ точкой f пересѣченія прямыхъ ab_1 и a_1b.

Изъ предыдущаго построенія видно, что всѣ полные четыреугольники, имѣющіе общими двѣ стороны и одну діагональ, выходящія изъ одной той-же точки, должны имѣть еще одну общую діагональ, выходящую изъ той-же точки.

Предложеніе это можетъ быть выражено еще иначе, именно, обращая вниманіе на чертежъ, мы видимъ, что если даны на плоскости двѣ прямыя OA и OB, то проведя чрезъ произвольную точку f плоскости нѣсколько паръ сѣкущихъ и соединяя на крестъ точки, въ которыхъ эти пары сѣкущихъ встрѣчаютъ двѣ данныя прямыя, мы получимъ систему точекъ пересѣченія этихъ соединительныхъ линій, которыя всѣ будутъ лежать на одной прямой.

3) Если даны три плоскости пучка и требуется найти къ нимъ четвертую гармоническую, — то стоитъ только пересѣчь данный пучекъ произвольной прямой или произвольной плоскостью и къ тремъ элементамъ, полученнаго въ сѣченіи образа, пріискать четвертый гармоническій. Плоскость, проходящая чрезъ этотъ послѣдній элементъ и ось даннаго пучка и будетъ искомая четвертая гармоническая.



ГЛАВА II.

Проэктивные геометрическіе образы.

§ 10. **Если два геометрическіе образа таковы, что зависимость между ихъ соотвѣтственными элементами можетъ быть выражена алгебраическимъ уравненіемъ и если каждому элементу одного образа соотвѣтствуетъ только одинъ опредѣленный элементъ другаго образа и наоборотъ каждому элементу втораго образа соотвѣтствуетъ только одинъ опредѣленный элементъ перваго —, то такого рода зависимость называютъ проэктивной, а самые образы проэктивными** *) (projectivische **) collineare ***) homographiques ****).

При этомъ возможны слѣдующія комбинаціи геометрическихъ образовъ: 1) два ряда точекъ, 2) два пучка лучей, 3) два пучка плоскостей, 4) рядъ точекъ и пучекъ лучей, 5) рядъ точекъ и пучекъ плоскостей, 6) пучекъ лучей и пучекъ плоскостей.

---

*) *Chasles* — Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en géométrie. Vid. Compte rendu de l'Ac. des Sc. 24. Décembre 1855. p. 1097. Срав. *Geiser* — Sopra un teorema fondamentale della geometria — Vid. Annali di matematica. Serie II. — T. IV. — 1870—71 p. 25.

) Steiner, *) Mebius, ****) Chasles.

Изъ опредѣленія проэктивныхъ образовъ очевидно слѣдуетъ что, **если два геометрическіе образа, каждый порознь, проэктивны съ третимъ —, то и всѣ три образа проэктивны между собою.**

Чтобы выразить аналитически проэктивную зависимость двухъ образовъ, согласимся обозначать черезъ $\{xy\}$ отрѣзокъ xy или $sin(xy)$, смотря потому будутъ-ли x и y элементы ряда или пучка и предположимъ, что x и x' суть два какіе нибудь соотвѣтственные элемента проэктивныхъ образовъ, m и n пара постоянныхъ элементовъ перваго образа а r' и s' пара постоянныхъ элементовъ втораго образа. Тогда положеніе элементовъ x и x' опредѣлится отношеніями:

$$\xi = \frac{\{mx\}}{\{nx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{r'x'\}}{\{s'x'\}}$$

и такъ какъ въ двухъ проэктивныхъ образахъ каждому элементу одного образа соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный элементъ другаго, то слѣдовательно между величинами ξ и ξ' должна существовать такого рода алгебраическая зависимость, чтобы каждому значенію ξ соотвѣтствовало только одно опредѣленное значеніе ξ' и наоборотъ каждому значенію ξ' — только одно опредѣленное значеніе ξ. Самый общій видъ такой зависимости есть слѣдующій:

$$\mathbf{A}\xi\xi' + \mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{D} = 0, \ldots\ldots (1)$$

гдѣ **A**, **B**, **C**, **D** постоянныя величины.

Такъ какъ въ это уравненіе входятъ три произвольныя постоянныя, именно отнсшенія трехъ изъ коефиціентовъ **A**, **B**, **C**, **D** къ одному изъ нихъ, то слѣдовательно для опредѣленія проэктивной зависимости необходимо

имѣть три условія. Предположимъ напр., что даны три пары соотвѣтственныхъ элементовъ:

$$a \text{ и } a', \qquad b \text{ и } b', \qquad c \text{ и } c'$$

и назовемъ черезъ

$$\alpha \text{ и } \alpha', \qquad \beta \text{ и } \beta', \qquad \gamma \text{ и } \gamma'$$

значенія ξ и ξ', отвѣчающія этимъ элементамъ.

Подставляя въ уравненіе (1) вмѣсто ξ и ξ' послѣдовательно α и α', β и β', γ и γ', мы получимъ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}\alpha\alpha' + \mathbf{B}\alpha + \mathbf{C}\alpha' + \mathbf{D} &= 0, \\ \mathbf{A}\beta\beta' + \mathbf{B}\beta + \mathbf{C}\beta' + \mathbf{D} &= 0, \\ \mathbf{A}\gamma\gamma' + \mathbf{B}\gamma + \mathbf{C}\gamma' + \mathbf{D} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

изъ которыхъ и могутъ быть опредѣлены отношенія трехъ изъ величинъ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ къ одной изъ нихъ. Если исключимъ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ между уравненіями (1) и (2), то найдемъ условіе проэктивной зависимости для случая, когда эта зависимость опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ. Исключеніе это можетъ быть выполнено слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненій (2) и (1) имѣемъ:

$$\alpha' = -\frac{\mathbf{B}\alpha + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\alpha + \mathbf{C}}, \qquad \beta' = -\frac{\mathbf{B}\beta + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\beta + \mathbf{C}},$$

$$\gamma' = -\frac{\mathbf{B}\gamma + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\gamma + \mathbf{C}}, \qquad \xi' = -\frac{\mathbf{B}\xi + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\xi + \mathbf{C}},$$

поэтому

$$\frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{A\beta + C}{A\alpha + C},$$

$$\frac{\alpha' - \xi'}{\beta' - \xi'} = \frac{\alpha - \xi}{\beta - \xi} \cdot \frac{A\beta + C}{A\alpha + C}$$

и слѣдовательно искомый результатъ исключенія будетъ:

$$\frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'} : \frac{\alpha' - \xi'}{\beta' - \xi'} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} : \frac{\alpha - \xi}{\beta - \xi}$$

или (см. § 1)

$$(a' b' c' x') = (a b c x).$$

Равенство это показываетъ, что, если, два геометрическіе образа находятся въ проэктивной зависимости, то необходимо чтобы ангармоническое отношеніе каждыхъ четырехъ элементовъ одного образа равнялось ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ другаго образа.

Легко убѣдиться, что это условіе не только необходимое но и вполнѣ достаточное. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что даны два такіе геометрическіе образа, что между ихъ соотвѣтственными элементами имѣетъ мѣсто равенство ангармоническихъ отношеній и пусть a и a', b и b', c и c' будутъ данныя три пары соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ образовъ. Тогда, удерживая принятыя обозначенія и взявъ еще какую нибудь пару соотвѣтственныхъ элементовъ x и x', мы будемъ имѣть равенство:

$$\frac{\alpha' - \gamma'}{\beta' - \gamma'} : \frac{\alpha' - \xi'}{\beta' - \xi'} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} : \frac{\alpha - \xi}{\beta - \xi},$$

которое приводится къ виду

$$\mathbf{A}\xi\xi' + \mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{D} = 0,$$

гдѣ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ постоянныя величины, выражающіеся извѣстнымъ образомъ помощію $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Уравненіе же это, какъ мы видѣли, показываетъ, что разсматриваемые образы находятся въ проэктивной зависимости. Поэтому можно опредѣлить проэктивные образы еще слѣдующимъ образомъ:

Два геометрическіе образа называются проэктивными, если между каждыми четырмя парами ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ имѣетъ мѣсто равенство ангарионическихъ отношеній *).

Предположимъ теперь, что положеніе элементовъ опредѣляется въ каждомъ изъ двухъ проэктивныхъ образовъ по отношенію къ одному изъ постоянныхъ элементовъ и согласимся обозначать черезъ $[xy]$ отрѣзокъ xy или $tg(xy)$, смотря потому будутъ ли x и y элементы ряда или пучка. Пусть x и x' будетъ пара соотвѣственныхъ элементовъ проэктивныхъ образовъ, тогда, называя постоянныя элементы черезъ m и r', положеніе элементовъ x и x' опредѣлится величинами

$$\mathbf{x} = [mx], \qquad \mathbf{x}' = [r'x']$$

и такъ какъ въ двухъ проэктивныхъ образахъ каждому элементу одного образа соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный элементъ другаго, то между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ должно имѣть мѣсто соотношеніе слѣдующаго вида:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{D} = 0, \ldots\ldots (3)$$

---

*) *Chasles* — Traité de géométrie supérieure. Paris 1852. p. 67.

гдѣ **A**, **B**, **C**, **D** постоянныя величины. Такъ какъ въ это уравненіе входятъ только три произвольныя постоянныя, то слѣдовательно для опредѣленія проэктивной зависимости необходимо чтобы было дано три условія, напр. три пары соотвѣтственныхъ элементовъ Предполагая, что данныя три пары элементовъ будутъ a и a', b и b', c и c' и называя черезъ **a** и **a'**, **b** и **b'**, **c** и **c'**, соотвѣтствующія имъ значенія **x** и **x'**, мы получимъ слѣдующія три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A\,aa'} + \mathbf{B\,a} + \mathbf{C\,a'} + \mathbf{D} &= 0, \\ \mathbf{A\,bb'} + \mathbf{B\,b} + \mathbf{C\,b'} + \mathbf{D} &= 0, \\ \mathbf{A\,cc'} + \mathbf{B\,c} + \mathbf{C\,c'} + \mathbf{D} &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

изъ которыхъ и могутъ быть опредѣлены отношенія трехъ изъ величинъ **A**, **B**, **C**, **D** къ одной изъ нихъ. Присоединяя къ уравненіямъ (4) еще уравненіе (3) и исключая между ними **A**, **B**, **C**, **D**, мы получимъ слѣдующее равенство:

$$\frac{\mathbf{a'-c'}}{\mathbf{b'-c'}} : \frac{\mathbf{a'-x'}}{\mathbf{b'-x'}} = \frac{\mathbf{a-c}}{\mathbf{b-c}} : \frac{\mathbf{a-x}}{\mathbf{b-x}}$$

или (см. § 1)

$$(a'\,b'\,c'\,x') = (a\,b\,c\,x),$$

которое выражаетъ уже извѣстное намъ свойство проэктивныхъ образовъ.

Если примемъ это свойство какъ опредѣленіе проэктивныхъ образовъ т. е. будемъ называть два геометрическіе образа проэктивными, если между ихъ соотвѣтственными элементами имѣетъ мѣсто равенство ангармоническихъ от-

ношеній, то для выраженія проэктивной зависимости найдемъ уравненіе того-же вида какъ и уравненіе (3).

Уравненія (1) и (3) мы будемъ называть общими уравненіями проэктивной зависимости двухъ образовъ.

§ 11. Уравненія (1) и (3) могутъ быть приведены къ другимъ болѣе простымъ формамъ, смотря потому какіе изъ элементовъ будутъ приняты за постоянные для опредѣленія положенія соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ образовъ.

Разсмотримъ сначала уравненіе (1).

а) Возьмемъ за постоянные элементы въ первомъ образѣ m и n, а во второмъ m' и s' (m и m' пара соотвѣтственныхъ элементовъ).

Тогда будемъ имѣть:

$$\xi = \frac{\{mx\}}{\{nx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{m'x'\}}{\{s'x'\}}$$

и слѣдовательно уравненіе (1) должно удовлетворяться значеніями

$$\xi = 0, \qquad \xi' = 0,$$

что требуетъ, чтобы

$$\mathbf{D} = 0.$$

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\mathbf{A}\xi'\xi' + \mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' = 0,$$

откуда, полагая

$$-\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}} = \sigma, \qquad -\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \nu',$$

получимъ для выраженія проэктивной зависимости слѣдующее равенство:

$$\frac{\sigma}{\xi} + \frac{\nu'}{\xi'} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Изъ этаго равенства видно, что σ есть значеніе ξ, соотвѣтствующее $\xi' = \infty$, а ν' есть значеніе ξ', соотвѣтствующее $\xi = \infty$ т. е. σ и ν' суть величины, опредѣляющія положеніе элементовъ s и n', соотвѣтствующихъ постояннымъ элементамъ s' и n.

b) Предположимъ теперь, что постоянные элементы будутъ: въ первомъ образѣ m и n, а во второмъ r' и n' (n и n' пара соотвѣтственныхъ элементовъ).

Тогда въ уравненіи (1)

$$\xi = \frac{\{mx\}}{\{nx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{r'x'\}}{\{n'x'\}}$$

и слѣдовательно оно должно удовлетвориться значеніями

$$\xi = \infty, \qquad \xi' = \infty,$$

что требуетъ, чтобы

$$\mathbf{A} = 0.$$

Поэтому уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{D} = 0,$$

откуда, полагая

$$-\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{B}} = \rho, \qquad -\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} = \mu',$$

получимъ слѣдующее уравненіе для выраженія проэктивной зависимости:

$$\frac{\xi}{\rho} + \frac{\xi'}{\mu'} = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ ρ и μ' суть величины, опредѣляющія положеніе элементовъ r и m', соотвѣтствующихъ постояннымъ элементамъ r' и m'.

c) Если примемъ за постоянные элементы въ первомъ образѣ m и n, во второмъ n' и m' (m и m', n и n' пары соотвѣтственныхъ элементовъ) и положимъ

$$\xi = \frac{\{mx\}}{\{nx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{n'x'\}}{\{m'x'\}},$$

то уравненіе (1) должно будетъ удовлетворятся значеніями

$$\xi = 0, \qquad \xi' = \infty$$

и

$$\xi = \infty, \qquad \xi' = 0$$

и слѣдовательно должно быть вида

$$\mathbf{A}\xi\xi' + \mathbf{D} = 0.$$

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ условіе проэктивной зависимости двухъ образовъ представится въ формѣ:

$$\xi\xi' = const \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

d) Предположимъ наконецъ, что постоянные элементы будутъ: въ первомъ образѣ m и n, а во второмъ m' и n' (m и m', n и n' пары соотвѣтственныхъ элементовъ) и что

$$\xi = \frac{\{mx\}}{\{nx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{m'x'\}}{\{n'x'\}}.$$

Тогда уравненіе (1) должно удовлетворяться значеніями

$$\xi = 0, \qquad \xi' = 0$$

и

$$\xi = \infty, \qquad \xi' = \infty$$

и поэтому должно быть вида

$$\mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' = 0$$

откуда, полагая $-\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}} = \pi$, получимъ слѣдующее условіе проэктивной зависимости:

$$\xi' = \pi\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Разсмотримъ теперь уравненіе (3).

а) Возьмемъ за постоянные элементы пару соотвѣтственныхъ элементовъ m и m', тогда въ уравненіи (3)

$$\mathbf{x} = [mx], \qquad \mathbf{x}' = [m'x']$$

и оно должно удовлетворяться значеніями

$$\mathbf{x} = 0, \qquad \mathbf{x}' = 0,$$

поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе (3) должно быть вида:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\,\mathbf{x} + \mathbf{C}\,\mathbf{x}' = 0$$

и слѣдовательно, полагая

$$-\frac{C}{A} = s, \qquad -\frac{B}{A} = n',$$

условіе проэктивной зависимости можетъ быть представлено въ формѣ

$$\frac{s}{x} + \frac{n'}{x'} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

b) Предположимъ теперь, что за постоянные элементы приняты такіе элементы i и j', которые обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что

$$[ij] = \infty, \qquad [j'i'] = \infty,$$

гдѣ j и i' суть элементы соотвѣтствующіе элементамъ j' и i.

Тогда въ уравненіи (3)

$$x = [ix], \qquad x' = [j'x']$$

и оно должно удовлетворяться значеніями

$$x = 0, \qquad x' = \infty$$

и

$$x = \infty, \qquad x' = 0.$$

Поэтому уравненіе (3) должно принять видъ:

$$A\,xx' + D = 0$$

и слѣдовательно условіе проэктивной зависимости будетъ

$$xx' = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Если i и j' суть элементы двухъ проэктивныхъ рядовъ точекъ, то выраженія

$$[ij] \quad \text{и} \quad [j'i']$$

обозначаютъ отрѣзки ij и $j'i'$ и слѣдовательно условія

$$[ij] = \infty, \qquad [j'i'] = \infty$$

показываютъ, что j и i' суть безконечно-удаленныя точки двухъ рядовъ. Поэтому элементы i и j' суть точки, соотвѣтствующія безконечно-удаленнымъ точкамъ и условіе (10) въ случаѣ двухъ проэктивныхъ рядовъ точекъ приметъ видъ:

$$ix \,.\, j'x' = const \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Такъ какъ на прямой линіи существуетъ только одна безконечно-удаленная точка, то слѣдовательно въ двухъ проэктивныхъ рядахъ возможна только одна пара точекъ i, j', соотвѣтствующихъ безконечно-удаленнымъ точкамъ. Точки i и j' мы будемъ называть **противуположными точками** (Gegenpuncte) двухъ проэктивныхъ рядовъ, тогда условіе (11) можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Въ двухъ проэктивныхъ рядахъ точекъ произведеніе разстояній пары соотвѣтственныхъ точекъ отъ противуположныхъ точекъ есть величина постоянная. Эту постоянную называютъ **степенью проэктивной зависимости** (Potenz der projectivischen Beziehung).

Если i и j' суть элементы двухъ проэктивныхъ пучковъ лучей, то выраженія

$$[ij] \quad \text{и} \quad [j'i']$$

обозначаютъ тангенсы угловъ (ij) и $(j'i')$, поэтому условія

$$[ij] = \infty \qquad \text{и} \qquad [j'i'] = \infty$$

замѣнятся въ этомъ случаѣ слѣдующими:

$$tg\,(ij) = \infty \qquad \text{и} \qquad tg\,(j'i') = \infty.$$

Откуда видимъ, что лучи i, j и i', j' суть соотвѣтственные взаимно-перпендикулярные лучи или иначе стороны соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ. Поэтому условіе (10) въ случаѣ двухъ проэктивныхъ пучковъ лучей приметъ видъ:

$$tg\,(ix)\,tg\,(j'x') = const. \ldots\ldots\ldots (12)$$

Легко убѣдиться, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей существуетъ только одна пара соотвѣтственныхъ взаимно-перпендикулярныхъ лучей. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x и x_1 будутъ взаимно-перпендикулярные лучи одного пучка, x' и x'_1 имъ соотвѣтствующіе взаимно-перпендикулярные лучи другаго пучка и

$$\mathbf{x} = tg\,(mx)\,, \qquad \mathbf{x}' = tg\,(r'x')\,,$$

$$\mathbf{x}_1 = tg\,(mx_1)\,, \qquad \mathbf{x}'_1 = tg\,(r'x'_1)\,,$$

то очевидно, что

$$\mathbf{x}\mathbf{x}_1 = -1 \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x}'\mathbf{x}'_1 = -1.$$

Обращаясь теперь къ уравненію (3), мы будемъ имѣть:

$$\mathbf{x}' = -\frac{\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}}, \qquad \mathbf{x}'_1 = -\frac{\mathbf{B}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}}{\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}}.$$

Перемножая послѣднія два равенства и замѣчая, что $\mathbf{x}'\mathbf{x}'_1 = -1$ и $\mathbf{x}\mathbf{x}_1 = -1$, получимъ уравненіе

$$x^2 - \frac{A^2 + B^2 - C^2 - D^2}{AC + BD} x - 1 = 0, \quad \ldots . \quad (13)$$

котораго корни опредѣлятъ положеніе такихъ взаимно-перпендикулярныхъ лучей перваго пучка, которымъ во второмъ пучкѣ соотвѣтствуютъ также взаимно-перпендикулярные лучи. Такъ какъ оба корня этого уравненія дѣйствительные и ихъ произведеніе равно — 1, то заключаемъ, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ вообще существуетъ только одна пара (всегда дѣйствительная) соотвѣтственныхъ взаимно-перпендикулярныхъ лучей или иначе одна пара соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ.

Если согласимся называть пару не соотвѣтственныхъ сторонъ этихъ прямыхъ угловъ, т. е. лучи i и j' **противуположными лучами**, то равенство (12) можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей произведеніе тангенсовъ угловъ, составляемыхъ парою соотвѣтственныхъ лучей съ противуположными лучами, есть величина постоянная.

При этомъ очевидно, что

$$tg(ix)\,tg(j'x') = \frac{1}{tg(jx)\,tg(i'x')}.$$

Если проэктивные пучки лучей таковы, что въ уравненіи (3) коефиціенты **A**, **B**, **C**, **D** удовлетворяютъ одновременно двумъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} A^2 + B^2 - C^2 - D^2 &= 0, \\ AC + BD &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots . \quad (14)$$

то тогда уравненіе (13) допускаетъ безчисленное множество корней и слѣдовательно въ такихъ двухъ пучкахъ

возможно безчисленное множество соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ. Не трудно видѣть, что этотъ случай имѣетъ мѣсто только тогда, когда оба пучка будутъ равные, т. е. такіе, что углы между всякими двумя лучами одного пучка по величинѣ равны угламъ между соотвѣтственными лучами другаго пучка.

Въ самомъ дѣлѣ, условія (14) даютъ:

$$\mathbf{A} = \pm \mathbf{D}, \qquad \mathbf{B} = \mp \mathbf{C}.$$

Поэтому уравненіе (3) приметъ одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{1 + \mathbf{x}\mathbf{x}'} = const,$$

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{1 - \mathbf{x}\mathbf{x}'} = const.$$

Откуда, замѣняя $\mathbf{x}$ черезъ $tg\,(mx)$ и $\mathbf{x}'$ черезъ $tg\,(r'x')$, получимъ

$$tg\,(mx - r'x') = const,$$

$$tg\,(mx + r'x') = const,$$

или

$$\left.\begin{aligned} (mx) - (r'x') &= const, \\ (mx) + (r'x') &= const \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Называя черезъ y и y' пару соотвѣтственныхъ лучей двухъ разсматриваемыхъ пучковъ, въ силу послѣднихъ равенствъ, будемъ имѣть:

$$(my) - (r'y') = const,$$

$$(my) + (r'y') = const.$$

Вычитая изъ этихъ равенствъ (15), получимъ:

$$(xy) = \pm (x'y'),$$

откуда видимъ, что условія (14) дѣйствительно возможны только тогда, когда въ обоихъ пучкахъ углы между соотвѣтственными парами лучей равны и имѣютъ одинаковые или разные направленія.

Все сказанное о пучкахъ лучей очевидно примѣняется и къ пучкамъ плоскостей.

---

§ 12. Найдемъ теперь условія подобія двухъ рядовъ. Два ряда точекъ называются **подобными**, если отношеніе между отрѣзками одного ряда равно отношенію между соотвѣтствующими отрѣзками другаго ряда; поэтому, называя черезъ a, b, c, x элементы одного ряда и черезъ a' b' c' x' элементы другаго ряда, мы, въ силу понятія о подобіи, будемъ имѣть:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'},$$

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a'x'}{b'x'},$$

откуда

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ax}{bx} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'x'}{b'x'}$$

или

$$(abcx) = (a'b'c'x'),$$

и слѣдовательно въ двухъ подобныхъ рядахъ ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ одного ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ другаго ряда; поэтому подобіе есть частный случай проэктивной зависимости. Изъ понятія о подобныхъ рядахъ очевидно слѣдуетъ, что безконечно-удаленной точкѣ одного ряда соотвѣтствуетъ безконечно-удаленная точка другаго ряда, поэтому можно опредѣлить подобные ряды, какъ такіе проэктивные ряды, въ которыхъ противуположныя точки совпадаютъ съ безконечно-удаленными.

Мы видѣли, что общее уравненіе проэктивной зависимости двухъ рядовъ можетъ быть представлено въ формѣ:

$$\mathbf{A}\xi\xi' + \mathbf{B}\xi + \mathbf{C}\xi' + \mathbf{D} = 0, \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$\xi = \frac{mx}{nx}, \quad \xi' = \frac{r'x'}{s'x'},$$

m, n и r', s' двѣ пары постоянныхъ точекъ перваго и втораго ряда, x и x' пара соотвѣтственныхъ точекъ.

Если оба ряда подобны, то безконечно-удаленной точкѣ одного должна соотвѣтствовать безконечно-удаленная точка другаго, поэтому уравненіе (1) должно удовлетворяться значеніями:

$$\xi = 1 \quad \text{и} \quad \xi' = 1$$

и слѣдовательно оно представитъ условіе подобія двухъ рядовъ, если между его коефиціентами имѣетъ мѣсто равенство:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0 \ldots\ldots\ldots (1')$$

Такъ какъ въ уравненіе (1) входятъ три произвольныя постоянныя, именно отношенія трехъ изъ коефиціентовъ **A**, **B**, **C**, **D** къ одному изъ нихъ и такъ какъ въ случаѣ подобія между этими постоянными имѣетъ мѣсто равенство (1′), то слѣдовательно для опредѣленія подобія двухъ рядсвъ достаточно имѣть два условія напр. двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ.

Такъ какъ уравненіе (1) представляетъ условіе подобія, если его коефиціенты удовлетворяютъ равенству (1′), то изъ этого заключаемъ, что уравненія (5), (6), (7), (8) представятъ условія подобія двухъ рядовъ, если входящія въ нихъ постоянныя величины будутъ удовлетворять равенствамъ:

$$\sigma + \nu' = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu'} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

$$const = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

$$\pi = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

Предположимъ теперь, что проэктивная зависимость двухъ рядовъ опредѣляется уравненіемъ

$$\mathbf{A}xx' + \mathbf{B}x + \mathbf{C}x' + \mathbf{D} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

гдѣ

$$\mathbf{x} = mx, \qquad \mathbf{x}' = r'x',$$

m и r постоянныя точки, x и x' пара соотвѣтственныхъ точекъ.

Если оба ряда подобны, то уравненіе (3) должно удовлетворяться значеніями:

$$\mathbf{x} = \infty \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x}' = \infty$$

и слѣдовательно должно быть вида:

$$\mathbf{B}x + \mathbf{C}x' + \mathbf{D} = 0 \ldots\ldots\ldots (16)$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$-\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{B}} = \mathbf{r}, \qquad -\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} = \mathbf{m}',$$

получимъ условіе подобія двухъ рядовъ въ формѣ

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{m}'} = 1, \ldots\ldots\ldots (17)$$

гдѣ $\mathbf{r}$ и $\mathbf{m}'$ суть величины, опредѣляющія положеніе точекъ r и m', соотвѣтствующихъ постояннымъ точкамъ r' и m.

Если въ двухъ подобныхъ рядахъ примемъ за постоянныя точки пару соотвѣтственныхъ точекъ, то уравненіе (16) должно удовлетворяться значеніями:

$$\mathbf{x} = 0 \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x}' = 0,$$

что требуетъ, чтобы $\mathbf{D} = 0$ и слѣдовательно уравненіе (16) приметъ видъ

$$\mathbf{B}x + \mathbf{C}x' = 0$$

Полагая $-\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}} = \mathbf{k}$, условіе подобія двухъ рядовъ будетъ:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{k}\mathbf{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Въ частномъ случаѣ когда $\mathbf{k} = \pm 1$ оба ряда будутъ равные.

Геометрическія свойства проэктивныхъ образовъ.

§ 13. Въ предыдущей главѣ мы назвали перспективнымъ положеніемъ двухъ разнородныхъ образовъ (ряда точекъ и пучка лучей, ряда точекъ и пучка плоскостей, пучка лучей и пучка плоскостей) такое ихъ положеніе, при которомъ каждый элементъ одного образа проходитъ чрезъ соотвѣтственный элементъ другаго и наоборотъ каждый элементъ послѣдняго образа лежитъ на соотвѣтствующемъ элементѣ перваго — и мы видѣли, что при такомъ положеніи двухъ образовъ ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ одного — равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ другаго —.

Согласимся теперь называть перспективнымъ положеніемъ двухъ рядовъ точекъ такое ихъ положеніе, при которомъ линіи, соединяющія ихъ соотвѣтственные элементы, проходятъ черезъ одну и ту-же точку. Въ этомъ случаѣ соединительныя линіи составятъ пучекъ лучей, который будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ каждымъ изъ разсматриваемыхъ рядовъ точекъ, поэтому ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ одного ряда будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ другаго ряда.

Перспективнымъ положеніемъ двухъ пучковъ лучей назовемъ такое ихъ положеніе, при которомъ точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей лежатъ на одной прямой. Этотъ рядъ точекъ пересѣченія будетъ перспективенъ съ каждымъ изъ данныхъ пучковъ и слѣдовательно ангармоническое отношеніе четырехъ лучей одного пучка равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ лучей другаго пучка.

Перспективнымъ положеніемъ двухъ пучковъ плоскостей назовемъ такое ихъ положеніе, при которомъ линіи пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей лежатъ въ одной плоскости и проходятъ черезъ одну и ту-же точку. Эта точка есть точка пересѣченія осей двухъ данныхъ пучковъ плоскостей. Пучекъ лучей, составленный линіями пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей, будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ каждымъ изъ данныхъ пучковъ плоскостей, поэтому ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей перваго пучка равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ плоскостей втораго пучка.

Такъ какъ при перспективномъ положеніи двухъ образовъ ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ одного образа равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ другаго, то слѣдовательно два образа, находящіеся въ перспективномъ положеніи, проэктивны.

Если теперь двумъ образамъ, находящимся въ перспективномъ положеніи, дадимъ другое, совершенно произвольное положеніе, то, очевидно, что зависимость между соотвѣтственными элементами сохранится т, е. будетъ имѣть мѣсто равенство ангармоническихъ отношеній и слѣдовательно оба образа будутъ проэктивны. Поэтому, **если два геометрическіе образа могутъ быть приведены въ перспективное положеніе, то они проэктивны.**

Легко убѣдиться и въ справедливости обратнаго предложенія, именно, что **два проэктивные образа всегда могутъ быть приведены въ перспективное положеніе.**

1) Предположимъ, что даны (фиг. 11) два проэктивные ряда точекъ: рядъ $a, b, c, \ldots . x$ на прямой L и рядъ $a', b', c', \ldots . x'$ на прямой L'. Помѣстимъ прямыя L и L'

такимъ образомъ чтобы въ точкѣ ихъ пересѣченія совпадала пара соотвѣтственныхъ точекъ, напр. a и a', проведемъ затѣмъ прямыя черезъ b и b' и черезъ c и c' и назовемъ черезъ O точку пересѣченія линій bb' и cc'. Если соединимъ O съ a и x' и назовемъ черезъ x_1 точку пересѣченія прямой Ox' съ L, то будемъ имѣть:

$$(abcx_1) = (a'b'c'x');$$

но, въ силу проэктивной зависимости двухъ данныхъ рядовъ

$$(abcx) = (a'b'c'x'),$$

слѣдовательно

$$(abcx_1) = (abcx),$$

что возможно только тогда, когда x и x_1 представляютъ одну и туже точку. Такимъ образомъ мы видимъ, что всѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки рядовъ L и L' *), пересѣкаются въ одной точкѣ O и слѣдовательно оба ряда точекъ находятся въ перспективномъ положеніи. Отсюда заключаемъ: что, **если два проэктивные ряда точекъ L, L' расположены такимъ образомъ, что въ точкѣ (L, L') **) совпадаетъ пара соотвѣтственныхъ элементовъ, то ряды находятся въ перспективномъ положеніи, т. е. линіи, соединяющія пары соотвѣтственныхъ точекъ проходятъ черезъ одну и ту-же точку.**

*) Для краткости, мы будемъ называть рядъ точекъ черезъ L, когда онъ расположенъ на прямой L; пучекъ лучей черезъ O, когда O его центръ; пучекъ плоскостей черезъ ω, когда ω его ось.

**) Черезъ (L, L') мы обозначаемъ точку пересѣченія прямыхъ L и L'.

Если ряды L и L' подобны, то, замѣчая, что въ этомъ случаѣ безконечно-удаленныя точки прямыхъ L и L' составляютъ пару соотвѣтственныхъ элементовъ, мы приходимъ къ заключенію, что **два подобныя ряда точекъ находятся въ перспективномъ положеніи, если они расположены на двухъ параллельныхъ прямыхъ или если прямыя, соединяющія двѣ пары ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ между собою параллельны.** Въ послѣднемъ случаѣ линіи, соединяющія соотвѣтственныя точки, составятъ пучекъ параллельныхъ лучей.

2) Предположимъ теперь, что даны (фиг. 12) два проэктивныхъ пучка $O|A, B, C, \ldots . X|$ и $O'|A', B', C', \ldots . X'|$ и помѣстимъ ихъ на плоскости такимъ образомъ, чтобы лучи OA и $O'A'$ лежали-бы на одной прямой. Назовемъ черезъ b и c точки $(OB, O'B')$ и $(OC, O'C')$ и черезъ a, x и x_1 точки пересѣченія прямой bc съ линіей OO' и лучами OX и $O'X'$, тогда будемъ имѣть:

$$(ABCX) = (abcx),$$

$$(A'B'C'X') = (abcx_1),$$

но, въ вслѣдствіи проэктивной зависимости двухъ данныхъ пучковъ,

$$(ABCX) = (A'B'C'X'),$$

поэтому

$$(abcx) = (abcx_1)$$

т. е. x и x_1 представляютъ одну и ту-же точку и слѣдовательно всѣ соотвѣтственные лучи пучковъ O и O' пересѣкаются въ точкахъ, лежащихъ на одной прямой bc, поэтому оба пучка находятся въ перспективномъ положеніи.

Итакъ, если два проективные пучка лучей расположены такимъ образомъ, что на линіи, соединяющей ихъ центры, лежитъ пара соотвѣтственныхъ лучей, то пучки находятся въ перспективномъ положеніи, т. е. точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей лежатъ на одной прямой.

3) Если даны два проэктивные пучка плоскостей ω и ω_1, то для приведенія ихъ въ перспективное положеніе можно поступить слѣдующимъ образомъ. Расположимъ эти пучки такъ, чтобы съ плоскостью, опредѣляемою ихъ осями, совпала пара соотвѣтственныхъ плоскостей и черезъ двѣ линіи пересѣченія другихъ двухъ паръ соотвѣтственныхъ плоскостей проведемъ плоскость, тогда въ сѣченіи съ пучками ω и ω_1 мы получимъ два пучка лучей, которые совпадутъ въ одинъ, такъ какъ они, будучи проэктивны, имѣютъ общій центръ и три общихъ луча, и слѣдовательно пучки ω и ω_1 будутъ находиться въ перспективномъ положеніи.

Такимъ образомъ мы видимъ, что **если два пучка плоскостей расположены такимъ образомъ, что съ плоскостью, опредѣляемою ихъ осями, совпадаетъ пара соотвѣтственныхъ плоскостей, то оба пучка находятся въ перспективномъ положеніи т. е. линіи пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей составляютъ пучекъ лучей.**

4) Предположимъ теперь, что даны (фиг. 13) рядъ точекъ a, b, c, ... x на прямой L и пучекъ лучей $O\,|\,A, B, C, \ldots . X\,|$, находящіеся въ проэктивной зависимости. Чтобы привести эти образы въ перспективное положеніе, мы поступимъ слѣдующимъ образомъ. Проведемъ черезъ b двѣ прямыя bm и bn такія, чтобы

$$\angle abm = (AB), \qquad \angle cbn = (BC)$$

и начертимъ двѣ окружности, изъ которыхъ первая проходила-бы черезъ точки a, b и касалась bm а вторая проходила-бы черезъ точки b, c и касалась bn. Эти двѣ окружности пересѣкутся въ точкѣ b и будутъ имѣть въ этой точкѣ двѣ различныя касательныя, слѣдовательно обѣ окружности должны пересѣчся еще въ какой-нибудь точкѣ O_1. — Соединяя O_1 съ a, b, c, x, мы очевидно будемъ имѣть:

$$\angle aO_1b = \angle abm = (AB), \quad \angle bO_2c = \angle cbn = (BC)$$

и слѣдовательно можемъ наложить пучекъ $O|A, B, C, \ldots . X|$ на пучекъ $O_1|a, b, c, \ldots . x|$ такимъ образомъ чтобы пучекъ $O|A, B, C|$ совпалъ съ $O_1|a, b, c|$. Теперь легко убѣдиться, что и лучь OX совпадаетъ съ O_1x. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ пучекъ O_1 перспективенъ съ рядомъ L, то

$$O_1(abcx) = (abcx),$$

кромѣ того пучекъ O и рядъ L проэктивны, слѣдовательно

$$O(ABCX) = (abcx),$$

поэтому получимъ равенство:

$$O_1(abcx) = O(ABCX),$$

которое показываетъ, что лучь O_1x совпадаетъ съ OX, ибо $O|A, B, C|$ совпало съ $O_1|a, b, c|$. Итакъ пучекъ O_1 равенъ пучку O и находится въ перспективномъ положеніи съ рядомъ L.

Подобное же построеніе можетъ быть сдѣлано и по другую сторону прямой L и слѣдовательно возможны два положенія для точки O_1 симметричныя относительно прямой L.

5) Если даны два проэктивные образа: ряда точекъ — L и пучекъ плоскостей — ω, то они могутъ быть приведены въ перспективное положеніе слѣдующимъ образомъ. Разсѣчемъ пучекъ ω плоскостью перпендикулярною къ его оси, тогда въ сѣченіи получимъ пучекъ лучей — O проэктивный съ рядомъ L. Проведемъ затѣмъ черезъ прямую L произвольную плоскость и помѣстимъ въ этой плоскости пучекъ O въ перспективное положеніе съ L и черезъ каждый лучь пучка O проведемъ плоскость перпендикулярную къ плоскости пучка O; такимъ образомъ мы получимъ пучекъ плоскостей — ω_1, который будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ рядомъ L и будетъ равенъ пучку ω.

6) Предположимъ наконецъ, что даны (фиг. 14) два проэктивные образа: пучекъ плоскостей — ω и пучекъ лучей — O и постараемся привести ихъ въ перспективное положеніе. Разсѣчемъ пучекъ ω плоскостью перпендикулярною къ его оси и назовемъ черезъ O', полученный въ сѣченіи пучекъ лучей, затѣмъ въ той-же плоскости проведемъ произвольную прямую L, которая пересѣчется съ пучками O' и ω въ рядѣ точекъ $a, b, c \ldots . x$. Очевидно, что пучки O', ω и рядъ L проэктивны и кромѣ того находятся въ перспективномъ положеніи. Помѣстимъ теперь пучекъ O на плоскости пучка O' такимъ образомъ, чтобы пучекъ O находился въ перспективномъ положеніи съ рядомъ L и чтобы точки O и O' лежали по одну и ту-же сторону прямой L. Если при этомъ точка O совпадетъ съ O', то пучки O и ω будутъ находиться въ перспективномъ положеніи. Если-же точки O и O' не совпадаютъ, то черезъ нихъ можно провести окружность, которой-бы центръ находился на пересѣченіи прямой L съ перпендикуляромъ къ линіи OO' изъ ея середины; пусть e и f будутъ точки пересѣченія этой окружности съ прямой L.

Такъ какъ точки O и O' должны лежать на одной и той-же полуокружности $eO'Of$, то слѣдовательно необходимо, чтобы

$$Of < O'f \quad \text{и} \quad Oe > O'e$$

или-же, чтобы

$$Of > O'f \quad \text{и} \quad Oe < O'e.$$

Возьмемъ первый изъ этихъ случаевъ (все послѣдующее можетъ быть примѣнено и ко второму случаю) и, предполагая пучекъ $O \mid f, e, a, b, c, \ldots . x \mid$ связаннымъ неизмѣняемымъ образомъ съ рядомъ L, нанесемъ этотъ пучекъ на пучекъ O' такимъ образомъ, чтобы прямые углы eOf и $eO'f$ совпали и пусть

$$O'f' = Of, \quad O'e' = Oe$$

и L' — новое положеніе прямой L, а $f', e', a' b' c', \ldots . x'$ и $O \mid f', e', a', b', c', \ldots . x' \mid$ новыя положенія ряда L и пучка O. Проведемъ черезъ f' прямую L_1 параллельную L, тогда L_1 пересѣчетъ пучекъ O' въ рядѣ точекъ $f', g, a_1, b_1, c_1, \ldots . x_1$ и очевидно, что рядъ этотъ будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ рядомъ L и будетъ съ нимъ подобенъ, такъ какъ прямыя L_1 и L параллельны. Если затѣмъ проведемъ черезъ L_1 плоскость параллельную оси ω, то эта плоскость пересѣчетъ пучекъ ω въ пучкѣ параллельныхъ лучей — P, который будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ рядомъ L_1.

Будемъ теперь вращать уголъ $f'O'e'$, вмѣстѣ съ наложеннымъ на O' пучкомъ O и рядомъ L, около $O'f$, при этомъ лучь $O'e'$ будетъ оставаться въ плоскости пучка

ω, проходящей черезъ g. Продолжая вращеніе въ ту или другую сторону до тѣхъ поръ пока e' не достигнетъ луча пучка P, проходящаго черезъ g (что всегда возможно, ибо $0'g < 0e'$), рядъ L перейдетъ изъ положенія L' въ L'' а пучекъ O приметъ положеніе $O' \mid f', g', a'', b'', c'', \ldots . x'' \mid$, при этомъ прямыя L_1 и L'' будутъ лежать въ плоскости пучка P и оба ряда L_1 и L'' будутъ находиться въ перспективномъ положеніи, такъ какъ они имѣютъ общую точку f'; кромѣ того, такъ какъ оба эти ряда подобны и пара ихъ соотвѣтственныхъ точекъ g и g' лежитъ на лучѣ пучка P, то и всѣ остальныя пары соотвѣтственныхъ точекъ должны лежать на лучахъ пучка P. Поэтому рядъ L'' будетъ перспективенъ съ пучкомъ ω, а слѣдовательно и пучекъ O въ новомъ своемъ положеніи $O' \mid a'', b'', c'', \ldots . x'' \mid$ будетъ перспективенъ съ пучкомъ ω.

Случаи перспективнаго положенія двухъ образовъ встрѣчаются весьма часто въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Для примѣра мы укажемъ нѣсколько предложеній, доказательство которыхъ основывается на свойствахъ образовъ, находящихся въ перспективномъ положеніи.

Въ двухъ проэктивныхъ рядахъ точекъ: a, b, c, ... и a', b', c', ... **точки**

$$(ab', a'b), \quad (ac', a'c), \quad (bc', b'c), \ldots .$$

лежатъ на одной прямой.

Предположимъ, что даны (фиг. 15) два проэктивные ряда: a, b, c, ... на прямой L и a', b', c', ... на прямой L'. Назовемъ черезъ O точку пересѣченія линій L и L'. Эту точку можно разсматривать какъ принадлежащую обоимъ рядамъ; пусть o будетъ точка ряда L, соотвѣтствующая точкѣ O ряда L' и o' точка ряда L', соотвѣтствующая точкѣ O ряда L. Возьмемъ въ рядахъ L и L'

двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ a, a' и b, b', тогда, въ силу проэктивной зависимости, будемъ имѣть:

$$(oO\,ab) = (Oo'\,a'b')$$

и слѣдовательно, если соединимъ a' съ точками o, O, a, b и a съ точками $O, o'\,a'\,b'$, то получимъ два проэктивные пучка лучей, ибо

$$a'(o\,O\,a\,b) = a(O\,o'\,a'\,b'),$$

и такъ какъ на линіи, соединяющей ихъ центры лежитъ пара соотвѣтствеиныхъ лучей $a'a$ и aa', то эти пучки находятся въ перспективномъ положеніи, поэтому точки

$$(a'o, aO) = o, \quad (a'O, ao') = o', \quad (a'b, ab')$$

должны лежать на одной прямой.

Подобнымъ же образомъ можно показать, что и точки

$$(ac', a'c), \quad (bc', b'c), \ldots.$$

лежатъ на той-же прямой oo'.

Въ частномъ случаѣ, когда ряды L и L' находятся въ перспективномъ положеніи, прямая oo' будетъ проходить черезъ O, ибо тогда точка O будетъ сама себѣ соотвѣтственная и слѣдовательно съ ней совпадутъ точки o и o'.

Въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей $O\,|\,A, B, C, \ldots.|$ **и** $O'\,|\,A', B', C', \ldots.|$ **прямыя, соединяющія точки**

$$(OA, O'B') \text{ и } (O'A', OB), \quad (OA, O'C') \text{ и } (O'A', OC),$$
$$(OB, O'C') \text{ и } (O'B', OC), \ldots.$$

пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предположимъ, что даны (фиг. 16) два пучка лучей $O\,|\,A, B, C, \ldots.|$ и $O'\,|\,A', B', C' \ldots.|$. Линію OO', соединяющую центры этихъ пучковъ, можно разсматривать, какъ элементъ принадлежащій обоимъ пучкамъ. Назовемъ черезъ OQ лучь пучка O, соотвѣтствующій лучу $O'O$ пучка O' и черезъ $O'R'$ лучь пучка O', соотвѣтствующій лучу OO' пучка O. Возьмемъ теперь въ пучкахъ O и O' двѣ какія нибудь пары соотвѣтственныхъ лучей OA, $O'A'$ и OB, $O'B'$, тогда, въ силу проэктивной зависимости будемъ имѣть:

$$O\,(QO'AB) = O'\,(OR'A'B')$$

и слѣдовательно, если пересѣчемъ эти пучки прямыми $O'A'$ и OA, то получимъ два проэктивные ряда q, O', a, b и O, r', a', b' и такъ какъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ OA и $O'A'$ совпадаетъ пара соотвѣтственныхъ точекъ a и a', то оба ряда находятся въ перспективномъ положеніи, поэтому линіи

$$Oq, \quad O'r', \quad bb'$$

должны пересѣкаться въ одной точкѣ т. е. прямая, соединяющая точки $(OA, O'B')$ и $(O'A', OB)$ должна проходить черезъ точку P — пересѣченія лучей OQ и $O'R'$. Подобнымъ же образомъ можно показать, что и прямыя, соединяющія точки

$$(OA, O'C') \quad \text{и} \quad (O'A', OC),$$

$$(OB, O'C') \quad \text{и} \quad (O'B', OC)\ldots.$$

проходятъ черезъ ту-же точку P. Въ частномъ случаѣ, когда пучки O и O' находятся въ перспективномъ положеніи, точка P будетъ лежать на прямой OO'.

Если вершины двухъ треугольниковъ въ одной плоскости лежатъ по—парно на трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, то стороны ихъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ на одной прямой *).

Предположимъ, что на плоскости даны (фиг. 17) два треугольника bCd и $b_1C_1d_1$, которыхъ соотвѣтственныя вершины лежатъ на трехъ прямыхъ bb_1, CC_1, dd_1, пересѣкающихся въ одной точкѣ O. Называя черезъ α точку пересѣченія прямыхъ bd и b_1d_1, черезъ c и c_1 точки пересѣченія CC_1 съ bd и b_1d_1 и соединяя α съ O, мы получимъ два проэктивныхъ ряда точекъ α, b, c, d и α, b_1, c_1, d_1, находящихся въ перспективномъ положеніи. Если теперь соединимъ съ этими рядами точки C и C_1, то получимъ два проэктивныхъ пучка лучей $C\,|\,\alpha, b, c, d\,|$ и $C_1\,|\,\alpha, b_1, c_1, d_1\,|$, которые будутъ находиться въ перспективномъ положеніи, такъ-какъ на линіи CC_1, соединяющей центры этихъ пучковъ, лежитъ пара соотвѣтственныхъ лучей Cc и C_1c_1; поэтому точки

$$(C\alpha, C_1\alpha) = \alpha\,, \quad (Cb, C_1b_1) = \beta\,, \quad (Cd, C_1d_1) = \delta$$

пересѣченія остальныхъ паръ соотвѣтственныхъ лучей лежатъ на одной прямой L.

Легко также убѣдиться и въ справедливости обратнаго предложенія т. е. что, **если стороны двухъ треугольниковъ въ плоскости пересѣкаются попарно въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, то**

---

*) Теорема эта предложена Дезаргомъ. См. конецъ сочиненія «Traité de perspective», публикованнаго *Boose*'омъ въ 1636 г. *) Въ послѣднее время эта теорема была воспроизведена въ первый разъ Servois въ сочиненіи Solutions peu connues de differens Problèmes de Géométrie pratique, pag. 23. Понселе основалъ на этой теоремѣ свою теорію гомологичныхъ фигуръ. См. Исторію Геометріи Шаля — Матем. сборникъ т. V, вып. 3, стр. 90.

*) ~~[illegible]~~ Cor. Bosse'a br 1648 cf. Charles "Ap. Hist." p. 83; la méth. [illegible]

вершины ихъ лежатъ по парно на трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ (фиг. 17), что стороны двухъ треугольниковъ bCd и $b_1C_1d_1$ пересѣкаются въ трехъ точкахъ

$$(bd, b_1d_1) = \alpha, \quad (Cb, C_1b_1) = \beta, \quad (Cd, C_1d_1) = \delta,$$

лежащихъ на одной прямой L. Соединяя точки C и C_1 съ точкой α, мы получимъ два проэктивныхъ пучка лучей $C\,|\,\alpha, \beta, C_1, \delta\,|$ и $C_1\,|\,\alpha, \beta, C, \delta\,|$, поэтому, пересѣкая ихъ прямыми bd и b_1d_1, мы получимъ два проэктивныхъ ряда точекъ α, b, c, d и α, b_1, c_1, d_1, находящихся въ перспективномъ положеніи, поэтому линіи bb_1, cc_1, и dd_1 должны пересѣкаться въ одной точкѣ.

Предположимъ теперь (фиг. 18), что на плоскости даны три треугольника bCd, $b_1C_1d_1$, $b_2C_2d_2$ такіе, что ихъ соотвѣтственныя вершины

$$b,\ b_1,\ b_2; \qquad C,\ C_1,\ C_2, \qquad d,\ d_1,\ d_2$$

лежатъ на трехъ прямыхъ bb_2, CC_2, dd_2, пересѣкающихся въ одной точкѣ O. Беря треугольники попарно и обозначая слѣдующимъ образомъ точки пересѣченія ихъ сторонъ:

$$(bd, b_1d_1) = \alpha \quad (bd, b_2d_2) = \alpha_1 \quad (b_1d_1, b_2d_2) = \alpha_2$$

$$(Cb, C_1b_1) = \beta \quad (Cb, C_2b_2) = \beta_1 \quad (C_1b_1, C_2b_2) = \beta_2$$

$$(Cd, C_1d_1) = \delta \quad (Cd, C_2d_2) = \delta_1 \quad (C_1d_1, C_2d_2) = \delta_2$$

мы, въ силу теоремы Дезарга, заключаемъ, что каждыя три точки

$$\alpha,\ \beta,\ \delta; \qquad \alpha_1,\ \beta_1,\ \delta_1; \qquad \alpha_2,\ \beta_2,\ \delta_2$$

должны лежать на одной прямой, эти прямыя мы назовемъ черезъ L.

Возьмемъ теперь треугольникъ $\alpha\alpha_1\alpha_2$. Изъ сдѣланныхъ обозначеній видно, что

$\alpha\alpha_1$ тождественно съ bd		$\beta\beta_1$ тождественно съ Cb	
$\alpha_1\alpha_2$ » »	b_2d_2	$\beta_1\beta_2$ » »	C_2b_2
$\alpha_2\alpha$ » »	b_1d_1	$\beta_2\beta$ » »	C_1b_1

слѣдовательно

$$(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1) = b$$
$$(\alpha_1\alpha_2\ \beta_1\beta_2) = b_2$$
$$(\alpha_2\alpha, \beta_2\beta) = b_1$$

и такъ какъ точки b, b_1, b_2 лежатъ на одной прямой, то слѣдовательно три линіи

$$\alpha\beta, \quad \alpha_1\beta_1, \quad \alpha_2\beta_2$$

т. е. линіи L пересѣкаются въ одной точкѣ, которую мы обозначимъ черезъ P. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему предложенію.

Если вершины трехъ треугольниковъ въ одной плоскости лежатъ по три на трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, то соотвѣтственныя стороны каждой пары этихъ треугольниковъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой L и три прямыя L пересѣкаются въ одной точкѣ P.

Въ разсмотрѣнной нами фигурѣ есть 20 точекъ: 9 вершинъ трехъ треугольниковъ, 9 точекъ пересѣченія

соотвѣтственныхъ сторонъ попарно взятыхъ треугольниковъ и точки O и P; затѣмъ 15 прямыхъ: 9 сторонъ трехъ треугольниковъ, 3 прямыя, на которыхъ лежатъ вершины треугольниковъ и три линіи L. Эти точки и прямыя обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что каждыя четыре изъ 20 точекъ лежатъ на одной изъ 15 прямыхъ, а каждыя три изъ 15 прямыхъ проходятъ черезъ одну изъ 20 точекъ. Кромѣ того эти 20 точекъ находятся попарно въ такой-же зависимости какъ и точки O и P *).

§ 14. Посмотримъ теперь какимъ образомъ могутъ быть построены соотвѣтственные элементы двухъ проэктивныхъ образовъ, когда для опредѣленія проэктивной зависимости даны три пары соотвѣтственныхъ элементовъ. Очевидно, что вопросъ этотъ рѣшается весьма просто, если оба образа приведены въ перспективное положеніе; поэтому мы разсмотримъ тотъ случай когда относительное положеніе проэктивныхъ образовъ какое угодно.

1) Предположимъ, что на прямыхъ L и L' (фиг. 19) даны точки a, b, c и a' b' c' и требуется построить соотвѣтственныя точки двухъ рядовъ L и L', которыхъ проэктивная зависимость опредѣляется тремя парами точекъ

$$a \text{ и } a', \quad b \text{ и } b', \quad c \text{ и } c'.$$

Соединивъ точки a и a', возьмемъ на прямой aa' двѣ произвольныя точки O и O' и соединимъ ихъ съ точками b, c и b', c'; пусть

*) Это развитіе теоремы Дезарга указано впервые Гессе см. *Hesse* — Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem. — Journal von Crelle Bd. 41 s. 269.

$$(Ob, O'b') = b_1, \qquad (Oc, O'c') = c_1 \quad \text{и} \quad (aa', b_1c_1) = a_1.$$

Если теперь возьмемъ на прямой L произвольную точку x, то соотвѣтствующая ей точка x' ряда L' найдется слѣдующимъ образомъ. Проводимъ прямую Ox и точку

$$x_1 = (Ox, b_1c_1)$$

соединяемъ съ O', тогда точка

$$x' = (O'x_1, L')$$

и будетъ искомая, ибо на линіи OO', соединяющей центры пучковъ O и O' лежатъ два соотвѣтственные луча, слѣдовательно пучки O и O' находятся въ перспективномъ положеніи и поэтому прямыя L и L' пересѣкаютъ ихъ въ двухъ проэктивныхъ рядахъ: a, b, c, x и a', b', c', x'.

Можно рѣшить тотъ-же вопросъ еще слѣдующимъ образомъ (фиг. 20). Проведемъ черезъ a' произвольную прямую L_1 и, взявъ на aa' произвольную точку O, соединимъ ее съ точками b и c и назовемъ черезъ b_1 и c_1 точки пересѣченія прямыхъ Ob и Oc съ L_1. Обозначивъ затѣмъ черезъ O' точку пересѣченія прямыхъ b_1b' и c_1c', соединимъ O' съ a'. Если теперь на прямой L возьмемъ произвольную точку x, то соотвѣтствующая ей точка x' ряда L' найдется слѣдующимъ образомъ. Проводимъ прямую Ox и точку

$$x_1 = (Ox, L_1)$$

соединяемъ съ O', тогда точка

$$x' = (O'x_1, L')$$

и будетъ искомая, ибо ряды L и L' проэктивны съ L_1.

2) Предположимъ, что (фиг. 21) для опредѣленія проэктивной зависимости двухъ пучковъ O и O' даны три пары лучей

$$OA \text{ и } O'A', \quad OB \text{ и } O'B', \quad OC \text{ и } O'C',$$

тогда для построенія соотвѣтственныхъ лучей можно поступить слѣдующимъ образомъ. Назовемъ черезъ a, a' точку пересѣченія лучей OA и $O'A'$ и проведемъ черезъ нее двѣ произвольныя прямыя L и L', которыя пересѣкутъ пучки $O|A, B, C|$ и $O'|A', B', C'|$ въ точкахъ a, b, c и a', b', c'. Проведемъ затѣмъ прямыя bb' и cc' и точку ихъ пересѣченія O'' соединимъ съ a. Если теперь возьмемъ въ пучкѣ O произвольный лучь OX, то, проведя черезъ точку

$$x = (OX, L)$$

и O'' прямую до встрѣчи съ L', мы получимъ точку x' а соединивъ эту послѣднюю съ O' найдемъ лучь $O'X'$ соотвѣтствующій лучу OX, ибо ряды L и L' находятся въ перспективномъ положеніи и слѣдовательно пучки $O|A, B, C, X|$ и $O'|A'B'C'X'|$ проэктивны.

3) Предположимъ, что проэктивная зависимость двухъ пучковъ плоскостей ω и ω' опредѣляется тремя парами элементовъ, тогда для построенія соотвѣтственныхъ элементовъ можно поступить слѣдующимъ образомъ. Разсѣчемъ пучки ω и ω_1 какой нибудь плоскостью, тогда въ сѣченіи мы получимъ по три луча пучковъ лучей O и O'. Если теперь по тремъ парамъ лучей пучковъ O и O' найдемъ соотвѣтственные элементы X и X' этихъ образовъ, то, проведя черезъ X и ось ω и черезъ X' и ось ω' плоскости, мы получимъ пару соотвѣтственныхъ плоскостей пучковъ ω и ω'.

Можно поступить еще слѣдующимъ образомъ. Пересѣкаемъ пучки ω и ω' двумя прямыми L и L', лежащими въ одной плоскости, тогда въ сѣченіи съ пучкомъ ω получимъ три точки на L а въ сѣченіи съ пучкомъ ω' три точки на L'. Если теперь по тремъ парамъ точекъ рядовъ L и L' найдемъ соотвѣтственные элементы x и x' этихъ образовъ, то, проведя плоскости черезъ x и ось ω и черезъ x' и ось ω', мы получимъ пару соотвѣтственныхъ плоскостей пучковъ ω и ω'.

4) Предположимъ, что даны три луча A, B, C пучка O и три точки a, b, c ряда L и требуется по этимъ тремъ парамъ элементовъ найти соотвѣтственные элементы проэктивныхъ образовъ O и L. Разсѣчемъ пучекъ O произвольной прямой L', тогда въ сѣченіи получимъ точки a', b', c'. Если теперь по тремъ парамъ точекъ a и a' b и b', c и c' найдемъ соотвѣтственые элементы x и x' рядовъ L и L' то, проведя черезъ x' лучь пучка O, элементы Ox' и x и будутъ соотвѣтственные элементы проэктивныхъ образовъ O и L.

Можно поступить еще слѣдущимъ образомъ. Соединимъ какую нибудь точку O' съ точками a, b, c и найдемъ соотвѣтственныя элементы OX и $O'X'$ пучковъ O и O' тогда лучь OX и точка $x = (O'X', L)$ будутъ соотвѣтственными элементами проэктивныхъ образовъ O и L.

5) Предположимъ, что даны три плоскости пучка ω и три точки ряда L и требуется по этимъ тремъ парамъ элементовъ найти соотвѣтственные элементы проэктивныхъ образовъ ω и L. Проведя черезъ L плоскость и называя черезъ O пучекъ лучей, полученный въ сѣченіи этой плоскости съ пучкомъ ω, мы приведемъ построеніе соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ образовъ ω и L къ построенію соотвѣтственныхъ элементовъ ряда L и пучка O. Легко также видѣть, что построеніе соотвѣтственныхъ

элементовъ проэктивныхъ образовъ L и ω можетъ быть приведено къ построенію соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ проэктивныхъ рядовъ точекъ или двухъ проэктивныхъ пучковъ лучей.

6) Предположимъ, что проэктивная зависимость пучка плоскостей и пучка лучей опредѣляется тремя парами элементовъ. Легко убѣдиться, что построеніе соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ образовъ можетъ быть приведено къ построенію соотвѣтственныхъ элементовъ слѣдующихъ проэктивныхъ образовъ: двухъ пучковъ лучей, двухъ рядовъ точекъ или наконецъ ряда точекъ и пучка лучей.

§ 15. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ свойствъ проэктивныхъ образовъ одного рода.

Разсмотримъ сначала два проэктвные ряда. При выводѣ условій проэктивной зависимости двухъ рядовъ, мы встрѣтились съ особенными точками, соотвѣтствующими безконечно-удаленнымъ точкамъ и назвали ихъ противуположными точками. Предположимъ (фиг. 22), что два проэктивные ряда L и L' приведены въ перспективное положеніе, при этомъ, какъ мы видѣли, линіи соединяющія соотвѣтственыя точки рядовъ L и L', пересѣкаются въ одной точкѣ. Назовемъ эту точку. черезъ O и проведемъ черезъ нее произвольную прямую xx', тогда эта прямая должна пересѣчь ряды L и L' въ двухъ соотвѣтственныхъ точкахъ x и x' и слѣдовательно, если xx' пересѣкаетъ какую нибудь изъ прямыхъ L и L' въ безконечно-удаленной точкѣ, то съ другой она встрѣтится въ противуположной точкѣ. Поэтому для построенія противуположныхъ точекъ нужно поступить слѣдующимъ образомъ,

Приведя ряды L и L' въ перспективное положеніе, нужно, черезъ точку пересѣченія линій, соединяющихъ соотвѣтственныя точки рядовъ L и L', провести прямую L_1 параллельную L и — L_2 параллельную L', тогда точки

$$i = (L, L_2) \quad \text{и} \quad j' = (L', L_1)$$

и будутъ противуположныя точки.

Предположимъ теперь, что прямая xx' вращается около θ, при этомъ она всегда будетъ встрѣчать ряды L и L' въ двухъ соотвѣтственныхъ точкахъ и если точка (xx', L) будетъ двигаться по части A прямой L отъ i до ∞, то соотвѣтствующая ей точка (xx', L'), находясь постоянно на части A' прямой L', будетъ переходить отъ ∞' до j' и наоборотъ, когда точка (xx', L') движется по части A' отъ j' до ∞', то соотвѣтствующая ей точка (xx', L) будетъ двигаться по части A отъ ∞ до i. Точно также, когда точка (xx', L) перемѣщается по части B прямой L отъ i до ∞, то соотвѣтствующая ей точка (xx', L'), находясь постоянно на части B' прямой L', будетъ двигаться отъ ∞' до j'. Такимъ образомъ мы видимъ, что противуположныя точки i и j' раздѣляютъ прямыя L и L' на двѣ половины, которыя обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что каждая точка половины A имѣетъ себѣ соотвѣтствующую на половинѣ A' и наоборотъ каждая точка половины A' имѣетъ себѣ соотвѣтствующую на половинѣ A и кромѣ того, если какая нибудь точка половины A движется отъ i до ∞, то соотвѣтствующая ей точка движется по половинѣ A' отъ ∞' до j'; въ такой же зависимости находятся и половины B и B'. Очевидно, что эта связь половинъ сохраняется и въ томъ случаѣ, когда ряды L и L' будутъ выведены изъ перспективнаго положенія. Половины A и A', B и B' мы будемъ называть

соотвѣтственными половинами двухъ проэктивныхъ рядовъ L и L'.

Покажемъ теперь, что въ двухъ проэктивныхъ рядахъ L и L' существуютъ всегда **двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ** и найдемъ сначала такія соотвѣтственныя точки, которыя бы находились въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ противуположныхъ точекъ.

Мы видѣли, что условіе проэктивной зависимости двухъ рядовъ L и L', когда i и j' ихъ противуположныя точки, x и x' пара соотвѣтственныхъ точекъ, выражается равенствомъ

$$ix \,.\, j'x' = k\,,$$

гдѣ k постоянная величина.

Изъ этого равенства видно, что отрѣзки ix и $j'x'$ одинаковаго или разнаго знака, смотря потому будетъ ли k величина положительная или отрицательная. Предположимъ k величиной положительной и найдемъ пару такихъ положеній для x и x', для которыхъ бы $ix = j'x'$. Очевидно, что эти точки найдутся изъ равенства:

$$(ix)^2 = (j'x')^2 = k\,.$$

Равенство это показываетъ, что существуютъ двѣ пары такихъ точекъ, которыя находятся въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ i и j' и если назовемъ эти точки черезъ g, g' и h, h', то точки g и h должны лежать въ одинаковыхъ разстояніяхъ съ разныхъ сторонъ i а g' и h' должны находиться въ такихъ же разстояніяхъ съ разныхъ сторонъ j'; поэтому будемъ имѣть:

$$ig = hi = j'g' = h'j'$$

Въ случаѣ когда k величина отрицательная, точки, о

которыхъ идетъ рѣчь, найдутся, предполагая $ix = -j'x'$. Очевидно, что для построенія точекъ g и h, нужно начертить окружность, которой центръ въ i а радіусъ равенъ $\sqrt{\pm k}$, гдѣ знакъ $+$ долженъ быть взятъ при k положительномъ а знакъ $-$ при k отрицательномъ, тогда точки пересѣченія окружности съ прямою L и будутъ искомыя точки *).

Возьмемъ теперь въ рядахъ L и L' еще одну пару соотвѣтственныхъ точекъ z и z', тогда, въ силу условія проэктивной зависимости, будемъ имѣть:

$$ix \,.\, j'x' = iz \,.\, j'z',$$

откуда

$$\frac{ix}{iz} = \frac{j'z'}{j'x'}.$$

Вычитая обѣ части послѣдняго равенства изъ 1, найдемъ:

$$\frac{xz}{iz} = \frac{z'x'}{j'x'} \quad \text{или} \quad \frac{xz}{x'z'} = \frac{iz}{x'j'} = \frac{ix}{z'j'};$$

поэтому, если допустимъ, что точки x, x' и z, z' удовлетворяютъ равенству

$$xz = x'z',$$

то необходимо чтобы

$$iz = x'j' \quad \text{и также} \quad ix = z'j'.$$

---

*) Точки g, g', h, h' указаны въ первый разъ Штейнеромъ. *Iacob Steiner's* Verlesungen über synthetische Geometrie. 2 theil, bearbeitet von. H. Schröter Leipzig 1867. — s. 31.

И слѣдовательно, если въ ряду L возьмемъ какую-нибудь точку x и отложимъ на L' отрѣзокъ

$$z'j' = ix,$$

то тогда точки x, x', z, z' должны удовлетворять равенствамъ

$$iz = x'j' \quad \text{и} \quad xz = x'z'.$$

Если теперь въ ряду L возьмемъ еще точку y такую, чтобы

$$iy = xi$$

и отложимъ на L' отрѣзокъ $u'j' = iy$, то будемъ имѣть:

$$iu = y'j' \quad \text{и} \quad yu = y'u'.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что, если точки x, x', y, y', z, z', u, u' удовлетворяютъ условію

$$ix = yi = z'j' = j'u', \ldots\ldots\ldots (19)$$

то

$$iz = x'j', \quad iu = y'j' \ldots\ldots\ldots (20)$$

и

$$xz = x'z', \quad yu = y'u' \ldots\ldots\ldots (21)$$

Постараемся теперь показать, что при сдѣланныхъ условіяхъ кромѣ равенствъ (21) будутъ имѣть мѣсто и равенства

$$xu = u'x', \quad yz = z'y' \ldots\ldots\ldots (22)$$

Обозначая черезъ ∞ и ∞' безконечно-удаленныя точки рядовъ L и L', въ силу проэктивной зависимости, будемъ имѣть:

$$(xyi\infty) = (x'y'\infty'j')$$

и такъ какъ одна изъ точекъ x, y, i, ∞ безконечно-удаленная а другая — i раздѣляетъ отрѣзокъ xy пополамъ (ур. 19), то поэтому (§ 7)

$$(xyi\infty) = -1.$$

и слѣдовательно

$$(x'y'\infty\, 'j') = -1.$$

т. е. точка j' раздѣляетъ отрѣзокъ $x'y'$ пополамъ. Поэтому, въ силу равенствъ (20) будемъ имѣть:

$$iz = ui = x'j' = j'y' \ldots\ldots\ldots (23)$$

Вычитая изъ этихъ равенствъ равенство (19), получимъ:

$$iz - ix = ui - yi = x'j' - z'j' = j'y' - j'u'$$

или

$$xz = uy = x'z' = u'y' \ldots\ldots\ldots (24)$$

Изъ равенствъ (19), (23), (24) имѣемъ:

$$yu = z'x' \qquad zx = y'u'$$
$$ui = x'j' \qquad xi = u'j'$$
$$iz = j'y' \qquad iy = j'z'$$

откуда, замѣчая, что

$$yu + ui + iz = yz \qquad zx + xi + iy = zy$$
$$z'x' + x'j' + j'y' = z'y' \qquad y'u' + u'j' + j'z' = y'z'$$

находимъ равенства (22).

Предположимъ теперь, что точки x и z (фиг. 23) лежатъ на одной половинѣ ряда L напр. на половинѣ A а y и u на половинѣ B; тогда концы отрѣзковъ $xz = x'z'$ будутъ лежать на соотвѣтственныхъ половинахъ A и A', а концы отрѣзковъ $yu = y'u'$ на половинахъ B и B', концы же отрѣзковъ $xu = u'x'$, $yz = z'y'$ — на противуположныхъ половинахъ A и B', B и A'. Такъ какъ выборъ точки x совершенно произволенъ, то, измѣняя положеніе x, отрѣзки $xz = x'z'$ и $yu = y'u'$ будутъ принимать всѣ возможныя значенія отъ 0 до ∞ и соотвѣтственными нулевыми отрѣзками очевидно будутъ тѣ точки, которыя мы обозначили черезъ g и g', h и h', а безконечно-большими — отрѣзки $i\infty$ и $\infty' i'$. Что касается при этомъ отрѣзковъ $xu = u'x'$ и $yz = z'y'$, то они будутъ измѣняться отъ $gh = h'g'$ до $i\infty = i'\infty' = \infty$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Въ двухъ проэктивныхъ рядахъ L и L' существуютъ двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ; въ первой системѣ концы этихъ отрѣзковъ лежатъ на соотвѣтственныхъ половинахъ рядовъ L и L' и принимаютъ всѣ значенія отъ 0 (точки g', g и h, h') **до ∞, во второй системѣ концы соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ лежатъ на противуположныхъ половинахъ рядовъ L и L' и принимаютъ всѣ значенія отъ нѣкоторой опредѣленной величины ($gh = h'g'$) до ∞. Каждая точка рядовъ L и L' можетъ быть разсматриваема, какъ конечная точка двухъ отрѣзковъ, изъ которыхъ одинъ принадлежитъ къ первой системѣ а другой ко второй** *).

*) См. *Steiner* loc. cit. s. 33.

Въ двухъ подобныхъ рядахъ вообще нѣтъ соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ, ибо между соотвѣтственными отрѣзками должно существовать постоянное отношеніе; въ частномъ случаѣ, когда это отношеніе равно единицѣ т. е. когда ряды равные, то всѣ соотвѣтственные отрѣзки равны между собою.

§ 16. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію свойствъ двухъ проэктивныхъ пучковъ.

При нахожденіи условій проэктивной зависимости двухъ пучковъ лучей, мы видѣли, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ существуетъ пара соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ и назвали несоотвѣтственныя стороны этихъ угловъ противуположными лучами. Посмотримъ теперь какимъ образомъ могутъ быть построены эти лучи. Предположимъ (фиг. 24), что два проэктивные пучка лучей 0 и $0'$ приведены въ перспективное положеніе и пусть L будетъ прямая, на которой лежатъ точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей. Проведемъ черезъ точки 0 и $0'$ окружность, которой центръ находился бы на пересѣченіи линіи L съ перпендикуляромъ mh, возставленнымъ къ линіи $00'$ изъ ея середины и, назвавъ черезъ α и β точки пересѣченія этой окружности съ L, проведемъ черезъ 0 и α, 0 и β прямыя I и J и черезъ $0'$ и α, $0'$ и β прямыя I' и J'. Тогда лучи I и I' J и J' будутъ соотвѣтственные лучи пучковъ 0 и $0'$ и такъ какъ углы (IJ) и $(I'J')$ прямые, то слѣдовательно пары I и J', J и I' будутъ пары противуположныхъ лучей. Если линія L совпадаетъ съ mh, то черезъ точки 0 и $0'$ можно провести безчисленное множество окружностей, которыхъ центръ будетъ лежать на L и слѣдовательно въ этомъ случаѣ въ пучкахъ

O и O' будетъ существовать безчисленное множество соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ и очевидно, что тогда пучки O и O' равные.

Посмотримъ теперь не обладаютъ ли проэктивные пучки лучей свойствами апологичными свойствамъ проэктивныхъ рядовъ, указаннымъ въ предыдущемъ §. Предположимъ, что на плоскости даны (фиг. 25) два проэктивные пучка лучей O и O' и пусть α будетъ точка пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей A и A'; I и J', J и I' пары противуположныхъ лучей. Проведемъ черезъ α прямую L параллельную лучу J пучка O и назовемъ черезъ i точку (L, I); затѣмъ проведемъ черезъ ту-же точку α прямую L' параллельную лучу I' и подвинемъ центръ O' (вмѣстѣ съ пучкомъ O') по линіи A' до тѣхъ поръ пока отрѣзокъ $O'j'$ $(j' = (J', L'))$ не будетъ равенъ Oi. Тогда двѣ прямыя L и L' пересѣкутъ пучки O и O' въ двухъ проэктивныхъ рядахъ L и L', ряды эти будутъ находиться въ перспективномъ положеніи и i и j' будутъ ихъ противуположныя точки.

Мы видѣли, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ существуютъ двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ, которыя находятся въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ противуположныхъ точекъ, пусть эти точки въ рядахъ L и L' будутъ g и g', h и h', такъ что

$$ig = hi = j'g' = h'j'.$$

Если теперь черезъ g, h и g', h' проведемъ лучи G, H и G', H' пучковъ O и O', то очевидно, что

$$(IG) = (HI) = (J'G') = (H'J')$$

и

$$(JG) = (HJ) = (I'G') = (H'I').$$

Равенства эти показываютъ, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ существуютъ двѣ пары такихъ лучей G и G', H и H', которые составляютъ равные углы съ противуположными лучами.

Возьмемъ теперь въ рядахъ L и L' такія пары точекъ x и x', y и y', z и z', u и u', чтобы

$$ix = yi = z'j' = j'u',$$

тогда, какъ мы видѣли

$$iz = ui = x'j' = j'y'$$

и

$$\left.\begin{aligned} xz &= x'z' \\ yu &= y'u' \end{aligned}\right\} \qquad \left\{\begin{aligned} xu &= u'x' \\ yz &= z'y'. \end{aligned}\right.$$

Кромѣ того, если предположимъ, что точки x и z лежатъ на одной половинѣ ряда L а y и u на другой, то отрѣзки $xz = x'z'$ и $yu = y'u'$ принадлежатъ къ первой системѣ соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ и концы ихъ будутъ лежать на соотвѣтственныхъ половинахъ рядовъ L и L' а отрѣзки $xu = u'x'$ и $yz = z'y'$ принадлежатъ ко второй системѣ т. е. концы ихъ будутъ лежать на противуположныхъ половинахъ рядовъ L и L'.

Замѣтивъ это, проведемъ черезъ точки x и x', y и y', z и z', u и u' лучи X и X', Y и Y', Z и Z', U и U', тогда, очевидно, будемъ имѣть:

$$(IX) = (YI) = (Z'J') = (J'U'),$$

$$(IZ) = (UI) = (X'J') = (J'Y')$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{matrix}(XZ) = (X'Z') \\ (YU) = (Y'U')\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}(XU) = (U'X') \\ (YZ) = (Z'Y').\end{matrix}\right\}$$

При этомъ обѣ стороны угловъ $(XZ)=(X'Z')$, $(YU)=(Y'U')$ заключаются между сторонами соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ пучковъ O и O', а стороны угловъ $(XU)=(U'X')$, $(YZ)=(Z'Y')$ раздѣляются сторонами соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ.

Измѣняя положеніе точки x и вмѣстѣ съ тѣмъ луча X, мы получимъ двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ. Такимъ образомъ мы видимъ, что двумъ системамъ соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ рядовъ L и L' отвѣчаютъ двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ пучковъ O и O'. Поэтому заключаемъ, что **въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ существуютъ двѣ системы соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ, въ первой системѣ эти углы принимаютъ всѣ значенія отъ** O $[(GG), (G'G'), (HH), (H'H')]$ **до** 90° $[(IJ)=(J'I')]$ **и обѣ стороны ихъ лежатъ внутри соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ; во второй системѣ углы измѣняются отъ нѣкоторой опредѣленной величины** $[(GH)=H'G')]$ **до** 90° $[(IJ)=(J'I')]$ **и стороны ихъ раздѣляются сторонами соотвѣтственныхъ прямыхъ угловъ. Каждый лучь пучка можетъ быть разсматриваемъ, какъ сторона общая двумъ угламъ, изъ которыхъ одинъ принадлежитъ къ первой системѣ а другой ко второй** *).

Изъ предыдущаго самъ собой вытекаетъ способъ построенія соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ; но впрочемъ

---

*) Къ тому-же заключенію можно прійти и не пользуясь свойствами проэктивныхъ рядовъ, слѣдуя тому-же пути, который былъ употребленъ въ предыдущемъ §.

для этой цѣли можно употребить болѣе простой пріемъ. Приведемъ проэктивные пучки O и O' въ перспективное положеніе и назовемъ черезъ L (фиг. 26) прямую, на которой лежатъ точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей. Проведемъ черезъ точки O и O' произвольную окружность и назовемъ черезъ x и z точки ея пересѣченія съ L, если затѣмъ проведемъ черезъ эти точки лучи X, Z и $X'Z'$, пучковъ O и O', то X и X', Z и Z' будутъ пары соотвѣтственныхъ лучей и $(XZ) = (X'Z')$, поэтому углы (XZ) и $(X'Z')$ будутъ соотвѣтственные равные углы. Въ числѣ всѣхъ возможныхъ окружностей, проходящихъ черезъ O и O' будутъ двѣ касающіеся линіи L; если назовемъ черезъ g и h точки прикосновенія и проведемъ черезъ нихъ лучи G, H и G', H' пучковъ O и O' то получимъ двѣ пары соотвѣтственныхъ лучей G и G', H и H', которымъ отвѣчаютъ нулевые соотвѣтственные равные углы. Такимъ образомъ, проведя черезъ точки O и O' различныя окружности, мы получимъ соотвѣтственные равные углы первой системы.

Чтобы построить углы второй системы можно поступить слѣдующимъ образомъ. Опустимъ изъ O (фиг. 26 bis) перпендикуляръ Ok на линію L и, взявъ продолженіе его $kO_1 = Ok$, проведемъ черезъ точки O_1 и O' окружность; пусть x и u будутъ точки пересѣченія этой окружности съ прямою L. Соединивъ O_1 съ x и u и проведя черезъ x и u лучи X, U и X', U' пучковъ O и O', будемъ имѣть:

$$\angle xO_1u = \angle xOu = 180^\circ - \angle xO'u$$

и слѣдовательно

$$(XU) = (U'X')$$

и такъ какъ X и X', U и U' соотвѣтственные лучи пучковъ

O и O', то (XU) и $(U'X')$ будутъ соотвѣтственные равные углы. Приведя различныя окружности черезъ O_1 и O', мы построимъ цѣлую систему соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ. Такъ какъ точки O_1 и O' лежатъ съ разныхъ сторонъ линіи L, то въ этомъ случаѣ ни одна изъ окружностей, проходящихъ черезъ O_1 и O' не будетъ касаться линіи L и слѣдовательно всѣ соотвѣтственные равные углы, построенные указаннымъ образомъ, будутъ принадлежать ко второй системѣ.

Мы найдемъ также соотвѣтственные углы второй системы, если, опустивъ изъ O' перпендикуляръ $O'k'$ на линію L и, взявъ на его продолженіи точку O_1', такъ чтобы $k'O_1' = O'k'$, будемъ проводить окружности черезъ точки O_1' и O'.

Все сказанное въ этомъ параграфѣ о проэктивныхъ пучкахъ лучей можетъ быть примѣнено и къ проэктивнымъ пучкамъ плоскостей, ибо, пересѣкая два проэктивные пучка плоскостей плоскостями перпендикулярными къ ихъ осямъ, мы получимъ два проэктивные пучка лучей и притомъ такіе, что соотвѣтственные ихъ углы измѣряютъ соотвѣтственные углы пучковъ плоскостей.

Проэктивные ряды точекъ на одной прямой, проэктивные пучки лучей съ общимъ центромъ, проэктивные пучки плоскостей съ общей осью.

§ 17. Предположимъ что на прямой P находятся два проэктивные ряда точекъ L и L' и посмотримъ не существуютъ ли въ этомъ случаѣ **двойныя точки** т. е. такія, съ которыми совпадаетъ пара соотвѣтственныхъ точекъ. Назовемъ черезъ x и x' соотвѣтственныя точки рядовъ

L и L', черезъ p нѣкоторую постоянную точку прямой P и положимъ

$$px = \mathbf{x}, \qquad px' = \mathbf{x}'.$$

Тогда условіе проэктивной зависимости рядовъ L и L' представится въ формѣ

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\,\mathbf{x} + \mathbf{C}\,\mathbf{x}' + \mathbf{D} = 0$$

и такъ какъ для двойныхъ точекъ $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, то онѣ опредѣлятся уравненіемъ

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^2 + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{x} + \mathbf{D} = 0.$$

Уравненіе это показываетъ, что **въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой существуютъ только двѣ двойныя точки**, которыя будутъ обѣ дѣйствительныя, обѣ совпадающія или обѣ мнимыя, смотря потому будетъ ли выраженіе

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})^2 - 4\,\mathbf{A}\mathbf{D}$$

больше нуля, равно нулю или меньше нуля.

Если $\mathbf{A} = 0$ т. е. ряды L и L' подобные (см. ур. 16), то одна изъ двойныхъ точекъ удаляется въ безконечность.

Если назовемъ черезъ f и f_1 двойныя точки двухъ проэктивныхъ рядовъ на одной прямой, черезъ x и x' y и y' двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ, то въ силу проэктивной зависимости будемъ имѣть:

$$(xy\,ff_1) = (x'y'\,ff_1),$$

откуда находимъ, что

$$(xx'\,ff_1) = (yy'\,ff_1).$$

Равенство это показываетъ, что **ангармоническое отношеніе** $(x'xff_1)$ **остается постояннымъ для каждой пары соотвѣтственныхъ точекъ** x **и** x'.

Для большаго удобства опредѣленія двойныхъ точекъ, возьмемъ условіе проэктивной зависимости въ формѣ

$$ix \,.\, j'x' = k, \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

гдѣ i и j' противуположныя точки проэктивныхъ рядовъ L и L', лежащихъ на прямой P.

Назовемъ черезъ o середину отрѣзка ij', тогда будемъ имѣть:

$$ix = io + ox\,, \qquad j'x' = j'o + ox' = ox' - io$$

и слѣдовательно равенство (25) обратится въ

$$(ox + io)\ (ox' - io) = k.$$

Если теперь точки x и x' совпадаютъ, то $ox = ox'$ и слѣдовательно

$$(ox)^2 = (io)^2 + k \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Равенство это показываетъ, что **въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой середина отрѣзка между двойными точками совпадаетъ съ серединой отрѣзка между противуположными точками.**

Разсмотримъ теперь отдѣльно случаи, когда k величина положительная и когда k величина отрицательная.

1) Предположимъ k **величиной положительной и, назвавъ черезъ** g, g' (h, h') **такія точки рядовъ** L **и** L', **для которыхъ**

$$ix \,.\, j'x' = k = (ig)^2,$$

замѣнимъ въ уравненіи (26) k черезъ $(ig)^2$, тогда будемъ имѣть

$$(ox)^2 = (io)^2 + (ig)^2.$$

Равенство это показываетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ двойныя точки обѣ дѣйствительныя и лежатъ внѣ отрѣзка ij' въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ его середины. Кромѣ того изъ того-же равенства видно, что для построенія двойныхъ точекъ нужно (фиг. 27) изъ точки i возставить перпендикуляръ къ прямой P и, отложивъ на немъ часть $im = ig$, изъ точки o, какъ центра, радіусомъ om описать окружность, точки f и f_1 пересѣченія этой окружности съ линіей P и будутъ двойныя точки.

Такъ какъ k величина положительная, то изъ условія

$$ix \,.\, j'x' = k$$

видно, что отрѣзки ix и $j'x'$ одинаковаго знака. Но въ двухъ проэктивныхъ рядахъ соотвѣтственныя точки x и x' должны лежать на соотвѣтственныхъ половинахъ и кромѣ того, если точка x движется по какой нибудь половинѣ отъ i до ∞, то точка x' должна перемѣщаться по соотвѣтственной половинѣ отъ ∞' до j'; поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ по обѣ стороны отрѣзка ij' будутъ совпадать соотвѣтственныя половины рядовъ L и L' (см. фиг. 27) и такъ какъ, при движеніи точки x по прямой P, точка x' движется по той-же прямой въ противуположную сторону, то ряды L и L' называютъ рядами **разнаго направленія**.

Такимъ образомъ мы видимъ, что **въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой, имѣющихъ разное направленіе, существуютъ двѣ дѣйствительныя двойныя точки, которыя лежатъ внѣ отрѣзка ij' въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ его середины.**

2) Предположимъ теперь, что k величина отрицательная. Тогда $k = -(ig)^2$ и слѣдовательно уравненіе (26) приметъ видъ

$$(ox)^2 = (io)^2 - (ig)^2$$

замѣчая, что $2io = ij'$, $2ig = gh$, изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что двойныя точки обѣ дѣйствительныя и лежатъ внутри отрѣзка ij' въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ его середины o, если $ij' < gh$; обѣ совпадаютъ въ одну точку o, если $ij' = gh$ и наконецъ обѣ мнимыя, если $ij' > gh$. Кромѣ того изъ того-же равенства выводимъ слѣдующій способъ построенія двойныхъ точекъ: на отрѣзкѣ ij' (фиг. 28), какъ на діаметрѣ описываемъ окружность и на касательной къ ней въ точкѣ i откладываемъ отрѣзокъ $im = ig$ и затѣмъ, проведя черезъ m прямую параллельную ij', изъ точекъ n и n_1 пересѣченія этой параллели съ окржностью опускаемъ перпендикуляры на ij'; основанія f и f_1 этихъ перпендикуляровъ и будутъ двойныя точки, ибо $fn = ig$, $no = io$ и $(of)^2 = (no)^2 - (fn)^2$.

Такъ какъ k величина отрицательная, то слѣдовательно отрѣзки ix и $j'x'$ разнаго знака, поэтому заключаемъ, что въ этомъ случаѣ соотвѣтственныя половины рядовъ L и L' лежатъ одна на другой только между точками i и j' и такъ какъ при движеніи точки x точка x' движется по тому-же направленію какъ и x', то ряды L и L' называютъ рядами **одинаковаго направленія**.

Такимъ образомъ мы видимъ, что **въ двухъ проэктивныхъ рядахъ, имѣющихъ одинаковое направленіе, двойныя точки обѣ дѣйствительныя и лежатъ внутри отрѣзка ij' въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ его середины, если $ij' > gh$; обѣ совпадаютъ съ середи-**

ной отрѣзка ij', **если** $ij' = gh$ **или наконецъ обѣ мнимыя, если** $ij' < gh$.

Предыдущіе выводы не имѣютъ мѣста, если ряды L и L', лежащія на одной прямой, подобны, ибо тогда противуположныя точки и одна изъ двойныхъ точекъ совпадаютъ съ безконечно-удаленной точкой. Чтобы опредѣлить другую двойную точку возьмемъ условіе подобія въ формѣ (18)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{k}\mathbf{x},$$

гдѣ $\mathbf{k}$ постоянная величина, $\mathbf{x} = mx$, $\mathbf{x}' = m'x'$; m и m', x и x' двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ. Если назовемъ двойную точку черезъ f, то, въ силу послѣдняго равенства будемъ имѣть:

$$\frac{m'f}{mf} = \mathbf{k},$$

откуда заключаемъ, что двойная точка раздѣляетъ въ данномъ отношеніи отрѣзки между парами соотвѣтственныхъ точекъ.

Когда $\mathbf{k} = -1$ т. е. ряды L и L' равные и разнаго направленія, то двойная точка раздѣляетъ пополамъ отрѣзки между парами соотвѣтственныхъ точекъ.

Когда $\mathbf{k} = +1$ т. е. ряды L и L' равные и одинаковаго направленія, то обѣ двойныя точки лежатъ въ безконечности. Въ частномъ случаѣ, когда въ рядахъ L и L' кромѣ безконечно-удаленныхъ точекъ совпадаетъ еще одна пара соотвѣтственныхъ точекъ, то совпадаютъ и всѣ соотвѣтственныя точки.

§ 18. Предположимъ, что на плоскости даны два проэктивные пучка O и O', которыхъ центры совпадаютъ.

Очевидно, что при этомъ нѣкоторыя пары соотвѣтственныхъ лучей могутъ совпадать въ одинъ лучь; такіе лучи мы будемъ называть **двойными лучами**. Для опредѣленія этихъ лучей можно было-бы слѣдовать тому-же пути, какъ и въ предыдущемъ §, но мы употребимъ болѣе простой пріемъ. Пересѣчемъ пучки O и O' какой нибудь трансверсалью T, тогда на этой послѣдней мы получимъ два проэктивные ряда L и L', изъ которыхъ каждый будетъ находиться въ перспективномъ положеніи съ соотвѣтствующимъ пучкомъ и очевидно, что каждой двойной точкѣ рядовъ L и L' будетъ соотвѣтствовать двойной лучь пучковъ O и O' и наоборотъ двойному лучу будетъ соотвѣтствовать двойная точка. Поэтому заключаемъ что **въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей съ общимъ центромъ существуетъ только два двойныхъ луча.** Кромѣ того очевидно, что пучки O и O' будутъ одинаковаго или разнаго направленія (въ смыслѣ вращенія), смотря потому будутъ ли ряды L и L' одинаковаго или разнаго направленія.

Замѣтивъ это, назовемъ черезъ I и J', J и I' (фиг. 29 *) противуположные лучи пучковъ O и O' и проведемъ трансверсаль T параллельно къ одной изъ линій P, Q, дѣлящихъ попаламъ углы (IJ') и (JI'), напр. къ P. Пусть G, H и G', H' будутъ тѣ особенные лучи пучковъ O и O' которые образуютъ одинаковые углы съ противуположными лучами; тогда, обозначая черезъ X и X' пару соотвѣтственныхъ лучей, условіе проэтивной зависимости пучковъ O и O' можетъ быть представлено въ формѣ (см. ур. 12)

$$tg\,(IX)\,tg\,(J'X') = tg^2\,(IG)$$

*) На чертежѣ представленъ случай пучковъ одинаковаго направленія.

Но, если назовемъ черезъ X_1 лучь гармонически — сопряженный съ X по отношенію къ G и H, то, замѣчая, что лучь I дѣлитъ пополамъ уголъ между G и H будемъ имѣть (см. ур. (9′) гл. I)

$$tg\,(IX)\,tg\,(IX_1) = tg^2\,(IG)\,.$$

Сравнивая это равенство съ предыдущимъ, мы видимъ, что

$$tg\,(J'X') = tg\,(IX_1)$$

т. е. лучь X' составляетъ такой-же уголъ съ J', какъ X_1 съ I.

Зная это, не трудно видѣть, что точки g, h, g', h' пересѣченія лучей G, H, G' H' съ трансверсалью T суть особенныя точки рядовъ L и L' находящіеся въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ противуположныхъ точекъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, раздѣлимъ отрѣзокъ gh пополамъ въ точкѣ i найдемъ къ i гармонически-сопряженную, по отношенію къ g и h. Очевидно, что искомая точка должна быть безконечно-удаленная. Поэтому лучь гармонически-сопряженный съ Oi, по отношенію къ лучамъ G и H, параллеленъ прямой T т. е. совпадаетъ съ лучемъ P и такъ какъ P дѣлаетъ равные углы съ I и J', то съ P совпадаетъ и лучь пучка O', соотвѣтствующій лучу Oi. Такимъ образомъ мы видимъ, что точка i будетъ одна изъ противуположныхъ точекъ рядовъ, лежащихъ на прямой T. Подобнымъ же путемъ убѣждаемся, что другая противуположная точка j' есть середина отрѣзка $g'h'$. Кромѣ того, такъ какъ лучи G, I, H составляютъ съ T тѣ-же углы какъ и лучи G', J', H', то слѣдовательно отрѣзки gh и $h'g'$ равны между собой. Отсюда заключаемъ, что точки g, h, g', h' суть дѣйствительно тѣ особенныя точки рядовъ на трансверсали T, которыя находятся въ

одинаковыхъ разстояніяхъ отъ противуположныхъ точекъ. Изъ предыдущаго также видно, что середина o отрѣзка ij' лежитъ на лучѣ Q перпендикулярномъ къ P.

Замѣтивъ это и припоминая выводы предыдущаго §, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей съ общимъ центромъ двойные лучи лежатъ симметрично по отношенію къ линіи, дѣлящей пополамъ уголъ (IJ').

Если назовемъ черезъ F и F_1 двойные лучи двухъ проэктивныхъ пучковъ съ общимъ центромъ, черезъ X и X' пару соотвѣтственныхъ лучей, то **ангармоническое отношеніе** $(XX'\,FF_1)$ **остается постояннымъ для каждой пары соотвѣтственныхъ лучей** X **и** X'.

Въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ лучей съ общимъ центромъ оба двойные луча всегда дѣйствительные, если пучки разнаго направленія; если-же пучки одинаковаго направленія, то двойные лучи будутъ: оба дѣйствительные, если особенные лучи G, H **не раздѣляются лучами** G', H'; **оба совпадутъ въ одинъ лучь, если углы** (GH) **и** $(H'G')$ **лежатъ такъ, что совпадаютъ лучи** G **и** G' **или** H **и** H'; **наконецъ оба мнимые, если лучи** G, H **раздѣляются лучами** G', H'. (G' лежитъ въ углѣ (GH) а H' въ смежномъ углѣ).

Если два пучка лучей съ общимъ центромъ равные и разнаго направленія, то двойные ихъ лучи взаимноперпендикулярны и совпадаютъ съ линіями, дѣлящими пополамъ углы между парами соотвѣтственныхъ лучей.

Если два пучка лучей съ общимъ центромъ равные и одинаковаго направленія, то двойные ихъ лучи мнимые. Въ частномъ случаѣ, когда въ этихъ пучкахъ совпадаетъ пара соотвѣтственныхъ лучей, то совпадаютъ и всѣ соотвѣтственные лучи.

Что касается построенія двойныхъ лучей двухъ проэктивныхъ пучковъ съ общимъ центромъ, то для этаго стоитъ только пересѣчь эти пучки произвольной прямой и, найдя двойныя точки, полученныхъ въ сѣченіи рядовъ, соединить эти точки съ общимъ центромъ пучковъ.

Предложенія этаго § примѣняются и къ двумъ проэктивнымъ пучкамъ плоскостей съ общей осью, ибо такіе пучки пересѣкаются плоскостью въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ съ общимъ центромъ.

---

§ 19. Въ § 17 былъ указанъ способъ построенія двойныхъ точекъ проэктивныхъ рядовъ на общей прямой, который предполагаетъ извѣстнымъ положеніе противуположныхъ точекъ. Въ настоящемъ § мы укажемъ весьма простой способъ для построенія двойныхъ точекъ и двойныхъ лучей въ томъ случаѣ, когда проэктивная зависимость опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ. Способъ этотъ предложенъ Штейнеромъ и основывается на слѣдующемъ весьма простомъ свойствѣ окружности: что, если на окружности возьмемъ двѣ какія — нибудь постоянныя точки O и O' и соединимъ ихъ прямыми линіями съ различными положеніями точки x, движущейся по окружности, то при точкахъ O и O' получимъ два проэктивные пучка лучей. Чтобы въ этомъ убѣдиться, назовемъ (фиг. 30) черезъ α, β, γ, δ, ... различныя положенія точки x и соединимъ ихъ прямыми съ точками O и O', тогда получимъ два пучка лучей $O\,|\,\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots.|$ и $O'\,|\,\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots.|$, въ которыхъ, по свойству угловъ вписанныхъ въ кругѣ, каждый изъ угловъ одного пучка равенъ соотвѣтственному углу другаго пучка или дополняетъ этотъ уголъ до 180° (такъ на чертежѣ $\angle \alpha O \gamma =$

$\angle \alpha O' \gamma$ и $\angle \alpha O \delta + \angle \alpha O' \delta = 180^\circ$) и слѣдовательно синусы соотвѣтственныхъ угловъ всегда равны, поэтому

$$O(\alpha \beta \gamma \delta) = O'(\alpha \xi \gamma \delta),$$

что и доказываетъ справедливость высказаннаго предложенія.

Замѣтивъ это, предположимъ (фиг. 31), что на плоскости даны два проэктивные пучка $O \mid A, B, C, \ldots \mid$ и $O' \mid A', B', C', \ldots \mid$, которыхъ центры совпадаютъ и которыхъ проэктивная зависимость опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ лучей A и A', B и B', C и C'. Назовемъ черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ точки пересѣченія лучей $A, B, C, \ldots$ съ произвольною окружностью, проходящею черезъ общій центръ пучковъ O и O', и черезъ $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ точки пересѣченія съ той-же окружностью лучей $A', B', C', \ldots$ Возьмемъ двѣ какія нибудь точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей напр. точки α и α' и соединимъ первую изъ нихъ съ точками $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ а вторую съ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; тогда мы получимъ два пучка лучей $\alpha \mid \alpha', \beta', \gamma', \ldots \mid$ и $\alpha' \mid \alpha, \beta, \gamma, \ldots \mid$, при чемъ, въ силу выше доказаннаго предложенія, пучки O и α', O' и α проэктивны. Но по условію пучки O и O' находятся въ проэктивной зависимости, поэтому заключаемъ, что и пучки α и α' проэктивны и такъ какъ въ нихъ пара соотвѣтственныхъ лучей $\alpha\alpha'$ и $\alpha'\alpha$ составляютъ одну прямую, то эти пучки находятся въ перспективномъ положеніи и слѣдовательно точки:

$$(\alpha\beta', \alpha'\beta) = m, \qquad (\alpha\gamma', \alpha'\gamma) = n, \ldots$$

лежатъ на одной прямой. Если теперь какую-нибудь точку x прямой mn соединимъ съ α и α', то получимъ два соотвѣтственные луча пучковъ α и α' а, соединяя точку O

съ точками пересѣченія этихъ лучей съ окружностью, получимъ пару соотвѣтственныхъ лучей X и X' пучковъ O и O'. Поэтому, если точки пересѣченія лучей αx и $\alpha' x$ съ окружностью совпадаютъ, то совпадутъ и лучи X и X'; и слѣдовательно мы найдемъ двойные лучи F и F_1 пучковъ O и O', если соединимъ общій ихъ центръ съ точками пересѣченія прямой mn съ окружностью.

Такимъ образомъ мы видимъ, что для построенія двойныхъ лучей двухъ пучковъ съ общимъ центромъ, проэктивная зависимость которыхъ опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ лучей A и A', B и B', C и C', нужно провести произвольную окружность, проходящую черезъ общій центръ пучковъ и, найдя точки α и α', β и β', γ и γ' пересѣченія данныхъ трехъ паръ лучей съ окружностью, соединить α съ β', α' съ β; α съ γ', α' съ γ; затѣмъ, опредѣливъ точки

$$(\alpha\beta', \alpha'\beta) = m, \qquad (\alpha\gamma', \alpha'\gamma) = n,$$

провести прямую mn и точки ея пересѣченія съ окружностью соединить съ общимъ центромъ данныхъ пучковъ. Полученные такимъ образомъ лучи и будутъ двойные; при чемъ они будутъ оба дѣйствительные, совпадающіе или мнимые, смотря потому пересѣкаетъ ли прямая mn окружность въ двухъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ или мнимыхъ точкахъ.

На основаніи этаго способа могутъ быть построены и двойные точки. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ (фиг. 31), что на прямой P даны два рада точекъ a, b, c, ...; a', b', c', ..., проэктивная зависимость которыхъ опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ a и a', b и b', c и c'. Соединивъ a, b, c, ...; a', b', c', ... съ произвольной точкой O плоскости, мы получимъ два

проэктивные пучка лучей съ общимъ центромъ. Построивъ затѣмъ двойные лучи этихъ пучковъ, мы найдемъ двойныя точки данныхъ рядовъ въ пересѣченіи двойныхъ лучей съ линіей P.

Инволюція.

§ 20. Въ теоріи однородныхъ проэктивныхъ образовъ есть одинъ частный случай, который играетъ весьма важную роль въ Новой Геометріи и который извѣстенъ подъ именемъ **инволюціи**.

Два проэктивные ряда точекъ на одной прямой находятся въ инволюціи (составляютъ рядъ точекъ въ инволюціи), если каждой точкѣ p, разсматриваемой какъ точка перваго или втораго ряда, соотвѣтствуетъ въ обоихъ случаяхъ одна и таже точка p'. Пары точекъ p и p' называютъ **парами сопряженныхъ точекъ** инволюціи.

Назовемъ черезъ L и L' проэктивные ряды на одной прямой P, которые находятся въ инволюціи т. е. расположены такимъ образомъ, что каждой точкѣ p прямой P соотвѣтствуетъ одна и та-же точка p', будемъ ли мы разсматривать точку p, какъ принадлежащую ряду L или какъ принадлежащую ряду L'. Очевидно, что для выполненія такого условія необходимо, чтобы съ точкой p совпадали двѣ какія-нибудь точки x и y', изъ которыхъ первая принадлежитъ ряду L а вторая ряду L' и чтобы въ тоже время съ точкой p' совпадали точки x' и y, соотвѣтствующія точкамъ x и y'. Слѣдовательно точки p и p' суть конечныя точки двухъ совпадающихъ соотвѣтственныхъ равныхъ отрѣзковъ xy и $x'y'$. Кромѣ того, разсматривая безконечно-удаленную точку прямой P какъ

точку ряда L и какъ точку ряда L', мы видимъ, что въ рядахъ L и L' должны совпадать противуположныя точки, а слѣдовательно и всѣ соотвѣтственные равные отрѣзки первой или второй системы (см. § 15).

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему болѣе простому опредѣленію инволюціи: **если въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой совпадаютъ противуположныя точки, то ряды находятся въ инволюціи.** Точку, съ которой совпадаютъ противуположныя точки, называютъ **центромъ** инволюціи.

Предположимъ, что a, a'; b, b'; c, c'; .... будутъ пары сопряженныхъ точекъ ряда точекъ въ инволюціи и назовемъ черезъ L и L' проэктивные ряды, составляющіе эту инволюцію. Тогда, разсматривая точки a, a', b, b', c, c', ... какъ точки ряда L, соотвѣтствующія имъ точки ряда L' будутъ a', a, b', b, c', c, ... и, въ силу проэктивной зависимости рядовъ L и L', ангармоническое отношеніе каждыхъ четырехъ точекъ ряда L равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ ряда L'. Поэтому заключаемъ, что **въ рядѣ точекъ въ инволюціи ангармоническое отношеніе каждыхъ четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію точекъ имъ сопряженныхъ.**

Изъ понятія объ инволюціи слѣдуетъ, что, **если каждую пару сопряженныхъ точекъ ряда въ инволюціи соединимъ съ произвольной точкой плоскости, то получимъ пучекъ лучей, который будетъ пересѣкатся каждой прямой въ рядѣ точекъ въ инволюціи.**

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что на прямой даны пары сопряженныхъ точекъ a, a'; b, b'; c, c'; .... ряда въ инволюціи и, соединивъ эти точки съ произвольной точкой O плоскости, пересѣчемъ пучекъ $O\,|\,a, a', b, b', c, c', \ldots|$

произвольной прямой. Назовемъ черезъ $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \ldots$. точки пересѣченія этой прямой съ лучами пучка O; тогда ряды

$$a, a', b, b', c, c', \ldots \quad \text{и} \quad \alpha, \alpha'; \beta, \beta', \gamma, \gamma', \ldots$$

$$a', a, b', b, c', c, \ldots \quad \text{и} \quad \alpha', \alpha, \beta', \beta, \gamma', \gamma, \ldots$$

будутъ находиться въ перспективномъ положеніи и такъ какъ, по свойству инволюціи, ряды

$$a, a', b, b', c, c', \ldots \quad \text{и} \quad a', a, b', b, c', c, \ldots$$

проэктивны, то слѣдовательно и ряды

$$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \ldots \quad \text{и} \quad \alpha', \alpha, \beta', \beta, \gamma', \gamma, \ldots$$

также будутъ проэктивны. Отсюда заключаемъ, что точки $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \ldots$ составляютъ инволюцію, которой сопряженными точками будутъ $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \ldots$. Ряды $a, a'; b, b'; c, c'; \ldots$ и $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; \ldots$ суть проэктивные ряды точекъ въ инволюціи и въ разсматриваемомъ случаѣ они находятся въ перспективномъ положеніи.

Посмотримъ теперь въ какой формѣ представятся общія уравненія (1, 3) проэктивной зависимости рядовъ L и L', составляющихъ рядъ точекъ въ инволюціи.

Назовемъ черезъ p и q пару постоянныхъ точекъ прямой P и положимъ

$$\frac{px}{qx} = \xi, \qquad \frac{px'}{qx'} = \xi',$$

$$px = \mathbf{x}, \qquad px' = \mathbf{x}',$$

тогда общія уравненія проэктивной зависимости рядовъ L и L' будутъ:

$$A\xi\xi' + B\xi + C\xi' + D = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Если теперь предположимъ, что ряды L и L' находятся въ инволюціи т. е., что въ каждой точкѣ прямой P совпадаетъ пара какихъ нибудь точекъ x и y', при чемъ точки x' и y совпадаютъ также въ одну точку, то очевидно будемъ имѣть;

$$\frac{px}{qx} = \frac{py'}{qy'}, \qquad \frac{px'}{qx'} = \frac{py}{qy},$$

$$px = py', \qquad px' = py,$$

и слѣдовательно предыдущія уравненія не должны измѣняться отъ замѣны x на x' и ξ на ξ'; для чего необходимо, чтобы

$$B = C \neq 0.$$

Поэтому въ случаѣ инволюціи проэктивная зависимость рядовъ L и L' выразится условіемъ:

$$A\xi\xi' + B(\xi + \xi') + D = 0 \ldots\ldots\ldots (27)$$

или

$$Axx' + B(x + x') + D = 0 \ldots\ldots\ldots (28)$$

Выводъ условій (27) и (28) показываетъ, что, **если проэктивные ряды L и L' наложены на одну и туже прямую такимъ образомъ, что двѣ какія нибудь точки остаются соотвѣтственными, будемъ ли мы каждую изъ нихъ разсматривать, какъ точку ряда L или какъ точку ряда L', то проэктивная зависимость рядовъ L и L' выразится уравненіемъ (27, 28) т. е. ряды эти будутъ находиться въ инволюціи.**

Такъ какъ въ каждое изъ уравненій (27) и (28) входятъ только двѣ постоянныя, именно отношенія трехъ изъ коефиціентовъ къ одному изъ нихъ, то заключаемъ, что инволюція вполнѣ опредѣляется двумя парами сопряженныхъ точекъ, что впрочемъ слѣдуетъ и изъ самаго понятія объ инволюціи. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что для опредѣленія инволюціи даны двѣ пары сопряженныхъ точекъ p и p', q и q'; тогда съ каждой изъ этихъ точекъ должны совпадать двѣ точки проэктивныхъ рядовъ L и L'. Поэтому, называя черезъ xy', $x'y$, zu', $z'u$ пары точекъ, совпадающихъ съ точками p, p', q, q', мы будемъ имѣть для опредѣленія проэктивной зависимости рядовъ L и L' четыре пары соотвѣтственныхъ точекъ: xx', yy', zz', uu' т. е. по видимому болѣе данныхъ чѣмъ сколько нужно. Но очевидно, что положеніе четвертой пары точекъ uu' не представляетъ новаго условія, а есть только слѣдствіе даннаго положенія трехъ первыхъ паръ, которыя вполнѣ опредѣляютъ проэктивную зависимость рядовъ L и L' а слѣдовательно и инволюцію.

Такъ какъ въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой существуютъ только двѣ двойныя точки, то слѣдовательно и въ инволюціи возможны только двѣ такія точки, съ которыми совпадаетъ пара сопряженныхъ точекъ. Точки эти называютъ **двойными точками инволюціи** *) и изъ равенствъ (27, 28) видно, что онѣ будутъ обѣ дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя, смотря потому будетъ ли

$$\mathbf{B^2 > AD}, \quad \mathbf{B^2 = AD}, \quad \mathbf{B^2 < AD}.$$

Мы видѣли, что два проэктивные ряда находятся въ инволюціи, если совпадаютъ ихъ противуположныя точки.

*) Ихъ иногда называютъ фокусами.

Отсюда слѣдуетъ, что вообще всякіе два проэктивные ряда могутъ быть наложены такимъ образомъ, что будутъ находиться въ инволюціи. Не трудно убѣдиться, что это не всегда возможно, если противуположныя точки рядовъ совпадаютъ съ безконечно-удаленными т. е. если ряды подобны. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ въ уравненіи (28) $\mathbf{A} = 0$ и слѣдовательно необходимо, чтобы

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = const$$

т. е. чтобы ряды были равные и разнаго направленія. Такимъ образомъ мы видимъ, что подобные ряды не могутъ находиться въ инволюціи, исключая только случай когда они равны и имѣютъ разное направленіе. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ одна изъ двойныхъ точекъ инволюціи совпадаетъ съ безконечно-удаленной точкой (см. § 17).

§ 21. Найдемъ теперь болѣе простыя условія того, что система точекъ на прямой находится въ инволюціи Примемъ за постоянныя точки какую нибудь пару сопряженныхъ точекъ p и p' инволюціи и положимъ

$$\xi = \frac{px}{p'x}, \qquad \xi' = \frac{px'}{p'x'}.$$

Тогда, согласно понятію объ инволюціи, точкамъ p и p', разсматриваемымъ какъ точки одного изъ рядовъ, составляющихъ инволюцію, соотвѣтствуютъ точки p' и p другаго ряда, поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ условіе (27) приведется къ виду (см. § 11, ур. 7)

$$\xi\xi' = const, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

при чемъ очевидно, что $const = \frac{po}{p'o}$, если o центръ инволюціи.

Называя черезъ f и f_1 двойныя точки инволюціи, въ силу послѣдняго условія, будемъ имѣть:

$$\left(\frac{pf}{p'f}\right)^2 = \left(\frac{pf_1}{p'f_1}\right)^2 = const,$$

откуда

$$(pp'ff_1) = +1$$

или

$$(pp'ff_1) = -1.$$

Такъ какъ первое изъ этихъ равенствъ не можетъ имѣть мѣста, ибо ангармоническое отношеніе четырехъ различныхъ точекъ не можетъ равняться $+1$, то заключаемъ, что **всѣ пары сопряженныхъ точекъ въ инволюціи суть гармонически-сопряженныя относительно двойныхъ точекъ** и обратно: **всѣ гармонически-сопряженныя точки относительно двухъ постоянныхъ точекъ на прямой составляютъ систему въ инволюціи, двойными точками которой будутъ эти постоянныя точки.**

Примемъ теперь за постоянную точку центръ o инволюціи, тогда уравненіе (28) приведется къ виду (см. § 11, ур. 11)

$$ox \,.\, ox' = k \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Постоянную k называютъ **степенью инволюціи.**

Равенство это показываетъ, что при k положительномъ проэктивные ряды L и L', находящіеся въ инволюціи, имѣютъ разное направленіе т. е. по обѣ стороны центра

o совпадаютъ собтвѣтственныя половины A и A', B и B' рядовъ L и L' (см. фиг. 32) и слѣдовательно обѣ точки каждой пары сопряженныхъ точекъ инволюціи будутъ всегда находиться съ одной и той-же стороны центра. Въ этомъ случаѣ инволюцію называютъ **гиперболическою.**

Припоминая свойства двухъ рядовъ на одной прямой, имѣющихъ разное направленіе и называя черезъ g, h; g', h' тѣ особенныя точки рядовъ L и L', которыя лежатъ въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ противуположныхъ точекъ, мы придемъ къ заключенію, что **въ гиперболической инволюціи существуютъ всегда двѣ дѣйствительныя двойныя точки, находящіеся въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ центра.** Эти точки въ гиперболической инволюціи называютъ **ассимптотическими точками**; съ одной изъ нихъ совпадаютъ точки g и g' а съ другой h и h' и слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ въ рядахъ L и L' совпадаютъ соотвѣтственные равные отрѣзки первой системы (см. § 15).

Такъ какъ ассимптотическія точки съ каждой парой сопряженныхъ точекъ инволюціи составляютъ гармоническій рядъ, то слѣдовательно, если одна изъ ассимптотическихъ точекъ удалится въ безконечность, то другая должна дѣлить пополамъ разстоянія тежду каждой парой сопряженныхъ точекъ. Это имѣетъ мѣсто, когда инволюція составлена двумя равными рядами, имѣющими разное направленіе. Въ этомъ случаѣ инволюцію называютъ **гиперболическою-равностороннею** или **симметрическою.**

Если въ уравненіи (30) k величина отрицательная, то ряды L и L' одинаковаго направленія т. е. по обѣ стороны точки o совпадаютъ разныя половины A и B', A' и B (фиг. 33) и слѣдовательно обѣ точки каждой пары сопряженныхъ точекъ инволюціи лежатъ съ разныхъ сторонъ центра. Въ этомъ случаѣ инволюцію называютъ **эллип-**

тическою. Такъ какъ въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на одной прямой, имѣющихъ одинаковое направленіе двойныя точки мнимыя, если $ij' < gh$ и такъ какъ въ случаѣ инволюціи $ij' = 0$, то заключаемъ, что **въ эллиптической инволюціи двойныя точки всегда мнимыя**.

Въ разсматриваемомъ случаѣ въ рядахъ L и L' совпадаютъ точки g съ h' и h съ g' и слѣдовательно совпадаютъ соотвѣтственные равные отрѣзки второй системы. Точки (gh') и (hg') очевидно находятся въ одинаковыхъ разстояніяхъ отъ центра и поэтому Штейнеръ называетъ ихъ **равно-удаленными сопряженными точками** эллиптической инволюціи.

Предположимъ наконецъ въ уравненіи (30) $k = 0$. Тогда будемъ имѣть:

$$ox \,.\, ox' = 0$$

и слѣдовательно съ центромъ o совпадаютъ двойныя точки инволюціи а также всѣ точки x или-же x' т. е. по одной точкѣ изъ каждой пары сопряженныхъ точекъ инволюціи. Поэтому точку o должно разсматривать, какъ сопряженную съ любой точкой прямой, на которой расположена инволюція. Въ этомъ случаѣ инволюцію называютъ **параболической**.

Итакъ слѣдовательно степень инволюціи величина положительная въ гиперболической инволюціи, — отрицательная въ эллиптической и равна нулю въ параболической.

Изъ уравненія (30) вытекаетъ слѣдующій весьма простой способъ построенія сопряженныхъ точекъ въ инволюціи. Предположимъ, что для опредѣленія инволюціи на прямой P (фиг. 34) даны двѣ пары сопряженныхъ точекъ a и a', b и b'. Начертимъ произвольную окружность, проходящую черезъ точки a и a' и проведемъ черезъ точки

b и b' другую окружность, которая пересѣкалась-бы съ первою въ двухъ какихъ-нибудь точкахъ M и N. Тогда окружность, проходящая черезъ произвольную точку x прямой P и точки M и N, пересѣчется съ прямой P въ точкѣ x', при чемъ точки x и x' составятъ пару сопряженныхъ точекъ инволюціи, опредѣляемой черезъ a, a'; b, b'; центромъ этой инволюціи будетъ точка пересѣченія прямой MN съ P, ибо по свойству окружности имѣемъ:

$$oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob' = ox \,.\, ox' = oM \,.\, oN.$$

Двойными точками инволюціи будутъ точки прикосновенія прямой P съ двумя окружностями, проходящими черезъ M и N.

Изъ предыдущаго построенія видно, что, если мы имѣемъ на плоскости систему круговъ съ общей хордой MN (фиг. 35) и пересѣчемъ ее произвольной трансверсалью, то пары точекъ пересѣченія каждой изъ окружностей съ этой трансверсалью будутъ пары сопряженныхъ точекъ въ инволюціи. Центромъ инволюціи будетъ точка пересѣченія трансверсали съ линіей MN. При этомъ, если трансверсаль (E) пересѣкаетъ линію MN между точками M и N, то точки каждой пары лежатъ съ разныхъ сторонъ центра и слѣдовательно инволюція будетъ эллиптическая; если-же точки M и N лежатъ по одну сторону точки пересѣченія трансверсали (H) съ MN, то точки каждой пары лежатъ по одну сторону центра и слѣдовательно инволюція будетъ гиперболическая. Очевидно, что только въ этомъ послѣднемъ случаѣ возможны двѣ окружности, касающіеся трансверсали, эти точки прикосновенія будутъ ассимптотическими точками. Въ частномъ случаѣ, когда трансверсаль (S) параллельна MN, то центръ инволюціи и одна изъ двойныхъ точекъ будутъ лежать въ безконечности и инволюція

будетъ гиперболическая-равносторонняя. Если наконецъ трансверсаль (P) проходитъ черезъ точку M или N, то инволюція будетъ параболическая, ибо тогда съ этой точкой совпадаетъ одна точка изъ каждой пары сопряженныхъ точекъ инволюціи а также и двойныя точки.

Изъ предыдущаго видно, что, **если для опредѣленія инволюціи даны двѣ пары сопряженныхъ точекъ a и a', b и b', то инволюція будетъ эллиптическая или гиперболическая, смотря потому раздѣляются ли точки a, a' точками b, b' и точки b, b' точками a, a' или нѣтъ.**

Если на прямой P даны какія нибудь четыре точки a, b, c, d, то, группируя ихъ по парамъ, можно составить три слѣдующія группы по двѣ пары:

$$ab,\ cd\,; \qquad ac,\ bd\,; \qquad ad,\ bc$$

и изъ только что высказаннаго предложенія видно, что, при всякомъ положеніи этихъ точекъ, одна изъ названныхъ группъ опредѣлитъ инволюцію эллиптическую, а каждая изъ двухъ другихъ гиперболическую. Такъ напр. предполагая, что точки a, b, c, d расположены на прямой P въ послѣдовательности a, b, c, d, мы видимъ, что инволюція опредѣляемая парами:

$ab,\ cd$ — эллиптическая (E),

$ac,\ bd$ — гиперболическая (H_1),

$ad,\ bc$ — гиперболическая (H_2).

Возьмемъ теперь на линіи P произвольную точку m и назовемъ точки ей сопряженныя въ этихъ трехъ инволюціяхъ черезъ

$$e, \qquad h_1, \qquad h_2\,;$$

тогда по свойству инволюціи будемъ имѣть:

$$\text{для инволюціи } (E) \quad — \quad (acdm) = (bcde),$$
$$\text{» » } (H_1) \quad — \quad (acdm) = (cabh_1),$$
$$\text{» » } (h_2) \quad — \quad (acdm) = (dbah_2),$$

откуда находимъ:

$$(cabh_1) = (dbah_2),$$
$$(bdce) = (dbah_2),$$
$$(bdce) = (cabh_1).$$

Равенства эти показываютъ, что точки:

h_1 и h_2 составляютъ пару сопряжен. точекъ инволюціи (E)

e и h_2 » » » » » (H_1)

e и h_1 » » » » » (H_2).

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Четыре точки на прямой, разсматриваемыя какъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ, опредѣляютъ три различныя инволюціи, изъ которыхъ всегда одна эллиптическая (E) а двѣ другія (H_1) и (H_2) гиперболическія. Если на прямой возьмемъ произвольную точку m и назовемъ черезъ e, h_1, h_2 сопряженныя съ ней точки каждой изъ трехъ инволюцій, то точки h_1 и h_2 составятъ пару сопряженныхъ точекъ инволюціи (E), e и h_2 — пару сопряженныхъ точекъ инволюціи (H_1) — e и h_1 — пару сопряженныхъ точекъ инволюціи (H_2).

Изъ предыдущаго также видно, что точки a, b, c, d играютъ ту-же роль по отношенію къ точкамъ l, e, h_1, h_2, какъ эти послѣднія по отношенію къ первымъ т. е. что точки сопряженныя съ a въ трехъ инволюціяхъ, опредѣляемыхъ черезъ l, e, h_1, h_2, будутъ b, c, d.

---

§ 22. Если точки c, c' составляютъ пару сопряженныхъ точекъ инволюціи, опредѣляемой парами a, a'; b, b', то эти шесть точекъ называютъ **шестью точками въ инволюціи**.

Легко видѣть, **что три пары сопряженныхъ точекъ на прямой находятся въ инволюціи, если ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, взятыхъ изъ трехъ паръ, равно ангармоническому отношенію точекъ имъ сопряженныхъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ напр. что данныя пары точекъ a, a'; b, b'; c, c' таковы, что

$$(aa'bc) = (a'ab'c'),$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{ab}{a'b} \cdot \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ac}{a'c} \cdot \frac{ac'}{a'c'}.$$

Разсматривая a и a' какъ пару постоянныхъ точекъ, изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что точки a, a'; b, b'; c, c' удовлетворяютъ условію (29) и слѣдовательно находятся въ инволюціи.

Пользуясь этимъ предложеніемъ, легко убѣдиться, что, **если на одной прямой даны два проэктивные ряда** a, b, c, ...; a', b', c', ..., **то ихъ двойныя точки**

съ каждыми двумя парами, какъ a, b'; a', b, **составляютъ шесть точекъ въ инволюціи.**

Назовемъ черезъ f и f' двойныя точки данныхъ проэктивныхъ рядовъ, тогда, по свойству двойныхъ точекъ (см. § 17), будемъ имѣть:

$$(ff'aa') = (ff'bb')$$

и такъ какъ

$$(ff'bb') = (f'fb'b),$$

то слѣдовательно

$$(ff'aa') = (f'fb'b).$$

Равенство это показываетъ, что точки f, f'; a, b'; a', b находятся въ инволюціи.

Мы видѣли, что три пары точекъ a, a'; b, b'; c, c' находятся въ инволюціи, если ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, взятыхъ изъ трехъ паръ, равно ангармоническому отношенію точекъ имъ сопряженныхъ. Группируя различными способами сказанные четыре точки, мы получимъ слѣдующихъ 7 различныхъ условій того, что шесть точекъ составляютъ инволюцію:

$$(aa'bc) = (a'ab'c')$$
$$(bb'ac) = (b'ba'c')$$
$$(cc'ab) = (c'ca'b')$$

$$(aba'c') = (a'b'ac) \qquad (a'bac') = (ab'a'c)$$
$$(aba'c) = (a'b'ac') \qquad (ab'a'c') = (a'bac)$$

и, въ силу выше-указаннаго предложенія, заключаемъ, что каждое изъ этихъ условій влечетъ за собой 6 остальныхъ.

Послѣднія равенства могутъ быть представлены въ слѣдующей формѣ, предложенной въ первый разъ Дезаргомъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ab\,.\,ab'}{ac\,.\,ac'} &= \frac{a'b\,.\,a'b'}{a'c\,.\,a'c'}, \\ \frac{bc\,.\,bc'}{ba\,.\,ba'} &= \frac{b'c\,.\,b'c'}{b'a\,.\,b'a'}, \\ \frac{ca\,.\,ca'}{cb\,.\,cb'} &= \frac{c'a\,.\,c'a'}{c'b\,.\,c'b'}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\left.\begin{aligned} ab'\,.\,bc'\,.\,ca' &= -\,a'b\,.\,b'c\,.\,c'a, \\ ab'\,.\,bc\,.\,c'a' &= -\,a'b\,.\,b'c'\,.\,ca, \\ ab\,.\,b'c\,.\,c'a' &= -\,a'b'\,.\,bc'\,.\,ca, \\ ab\,.\,b'c'\,.\,ca' &= -\,a'b'\,.\,bc\,.\,c'a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Найдемъ теперь общія условія инволюціи шести точекъ. Будемъ опредѣлять положенія точекъ a, a'; b, b'; c, c' на прямой по отношенію къ двумъ постояннымъ точкамъ p и q этой прямой и положимъ

$$\alpha = \frac{pa}{qa}, \qquad \beta = \frac{pb}{qb}, \qquad \gamma = \frac{pc}{qc},$$

$$\alpha' = \frac{pa'}{qa'}, \qquad \beta' = \frac{pb'}{qb'}, \qquad \gamma' = \frac{pc'}{qc'};$$

тогда точки эти будутъ находиться въ инволюціи, если величины α, α'; β, β'; γ, γ' удовлетворяютъ уравненію (27) или, что-тоже, если имѣютъ мѣсто одновременно слѣдующія три уравненія:

$$\mathbf{A}\,\alpha\alpha' + \mathbf{B}\,(\alpha + \alpha') + \mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{A}\,\beta\beta' + \mathbf{B}\,(\beta + \beta') + \mathbf{D} = 0,$$

$$\mathbf{A}\,\gamma\gamma' + \mathbf{B}\,(\gamma + \gamma') + \mathbf{D} = 0,$$

въ которыхъ **A**, **B**, **D** неопредѣленные коефиціенты. Три эти условія сведутся къ одному, если мы исключимъ въ нихъ **A**, **B**, **D**. Вычитая третье уравненіе изъ перваго и втораго, найдемъ:

$$\mathbf{A}\,(\alpha\alpha' - \gamma\gamma') + \mathbf{B}\,[(\alpha + \alpha') - (\gamma + \gamma')] = 0,$$

$$\mathbf{A}\,(\beta\beta' - \gamma\gamma') + \mathbf{B}\,[(\beta + \beta') - (\gamma + \gamma')] = 0,$$

откуда, приравнивая величины для $\frac{A}{B}$, доставляемыя этими уравненіями, получимъ равенство:

$$\frac{(\alpha + \alpha') - (\gamma + \gamma')}{(\beta + \beta') - (\gamma + \gamma')} = \frac{\alpha\alpha' - \gamma\gamma'}{\beta\beta' - \gamma\gamma'}, \quad \ldots\ldots (33)$$

которое и будетъ условіе того что шесть точекъ a, a'; b, b'; c, c' находятся въ инволюціи.

Предположимъ теперь, что три пары величинъ α, α'; β, β'; γ, γ' суть пары корней трехъ слѣдующихъ уравненій.

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \mathbf{M}\xi + \mathbf{N} &= 0, \\ \xi^2 + \mathbf{M}_1\xi + \mathbf{N}_1 &= 0, \\ \xi^2 + \mathbf{M}_2\xi + \mathbf{N}_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34)$$

Тогда въ силу соотношеній

$$\alpha + \alpha' = -\mathbf{M}, \qquad \alpha\alpha' = \mathbf{N},$$

$$\beta + \beta' = -\mathbf{M}_1, \qquad \beta\beta' = \mathbf{N}_1,$$

$$\gamma + \gamma' = -\mathbf{M}_2, \qquad \gamma\gamma' = \mathbf{N}_2,$$

уравненіе (33) приметъ видъ:

$$\frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_2}{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2} = \frac{\mathbf{N} - \mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

и будетъ удовлетворено, если одновременно

$$\frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_2}{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2} = -\mu \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{N} - \mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2} = -\mu$$

т. е., если

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{M} + \mu\mathbf{M}_1}{1 + \mu} \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_2 = \frac{\mathbf{N} + \mu\mathbf{N}_1}{1 + \mu}; \ldots\ldots (35)$$

гдѣ μ произвольная постоянная. Поэтому, измѣняя μ и подставляя въ третье изъ уравненій (34) вмѣсто $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{N}_2$ величины, доставляемыя равенствами (35), мы найдемъ сколько угодно паръ точекъ, которыя будутъ находиться въ инволюціи съ парами точекъ, опредѣляемыхъ первыми двумя изъ уравненій (34).

Замѣтивъ это, помножимъ второе изъ уравненій (34) на μ и сложимъ съ первымъ, тогда получимъ уравненіе

$$(1 + \mu)\,\xi^2 + (\mathbf{M} + \mu\mathbf{M}_1)\,\xi + \mathbf{N} + \mu\mathbf{N}_1 = 0$$

или

$$\xi^2 + \frac{\mathbf{M} + \mu\mathbf{M}_1}{1 + \mu}\,\xi + \frac{\mathbf{N} + \mu\mathbf{N}_1}{1 + \mu} = 0,$$

въ которомъ коефиціенты при двухъ послѣднихъ членахъ имѣютъ величины опредѣляемыя уравненіями (35).

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, если двѣ пары точекъ на прямой опредѣляются уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \mathbf{M}\xi + \mathbf{N} &= 0, \\ \xi^2 + \mathbf{M}_1\xi + \mathbf{N}_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (36)$$

то, придавая въ уравненіи

$$\xi^2 + \mathbf{M}\xi + \mathbf{N} + \mu(\xi^2 + \mathbf{M}_1\xi + \mathbf{N}_1) = 0 \ldots . (37)$$

величинѣ μ различныя значенія, это послѣднее опредѣлитъ пары точекъ, которыя съ первыми двумя будутъ находиться въ инволюціи.

Если будемъ опредѣлять положеніе точекъ a, a'; b, b'; c и c' на прямой по отношенію къ одной постоянной точкѣ p этой прямой и положимъ:

$$\mathbf{a} = pa, \qquad \mathbf{b} = pb, \qquad \mathbf{c} = pc,$$

$$\mathbf{a}' = pa', \qquad \mathbf{b}' = pb', \qquad \mathbf{c}' = pc',$$

то, обращаясь къ уравненію (28), мы, подобно предыдущему, найдемъ слѣдующее условіе того, что точки a, a'; b b'; c, c' находятся въ инволюціи:

$$\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}' - (\mathbf{c} + \mathbf{c}')}{\mathbf{b} + \mathbf{b}' - (\mathbf{c} + \mathbf{c}')} = \frac{\mathbf{aa}' - \mathbf{cc}'}{\mathbf{bb}' - \mathbf{cc}'} \ldots\ldots (38)$$

Предполагая затѣмъ, что пары точекъ a, a'; b, b' опредѣляются уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x^2 + Mx + N &= 0, \\ x^2 + M_1x + N_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (39)$$

мы убѣдимся, что каждая третья пара точекъ, находящаяся съ первыми двумя въ инволюціи, опредѣлится уравненіемъ

$$x^2 + Mx + N + \mu (x^2 + M_1x + N_1) = 0, \ldots (40)$$

придавая въ немъ различныя значенія μ.

---

§ 23. Разсмотримъ теперь свойства проэктивныхъ пучковъ находящихся въ инволюціи.

Два проэктивные пучка лучей съ общимъ центромъ находятся въ инволюціи (составляютъ пучекъ лучей въ инволюціи), если каждому лучу P, разсматриваемому какъ лучь перваго или втораго пучка, соотвѣтствуетъ въ обоихъ случаяхъ одинъ и тотъ-же лучь P'. Лучи P и P' называютъ **парой сопряженныхъ лучей** инволюціи.

Разсужденія подобныя предложеннымъ въ § 20 убѣждаютъ, что въ этомъ случаѣ лучи P и P' суть стороны соотвѣтственныхъ равныхъ угловъ, пучковъ O и O', находящихся въ инволюціи и что въ этихъ пучкахъ совпадаютъ противуположные лучи и соотвѣтственные равные углы первой или второй системы. Поэтому мы можемъ опредѣлить инволюцію еще слѣдующимъ образомъ: **два проэктивные пучка лучей съ общимъ центромъ находятся въ инволюціи, если въ нихъ совпадаютъ противуположные лучи.** Линіи, съ которыми совпадаютъ противуположные лучи, называютъ **осями инволюціи.**

Изъ понятія объ инволюціи слѣдуетъ, что **въ пучкѣ лучей въ инволюціи ангармоническое отношеніе каждыхъ четырехъ лучей равно ангармоническому отношенію лучей имъ сопряженныхъ**

Сопоставляя это предложеніе съ аналогичнымъ ему предложеніемъ для ряда точекъ въ инволюціи (§ 20) и припоминая общія свойства проэктивныхъ образовъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

Лучи, соединяющіе пары сопряженныхъ точекъ ряда точекъ въ инволюціи съ произвольной точкой плоскости, составляютъ пучекъ лучей въ инволюціи.

Пучекъ лучей въ инволюціи пересѣкается произвольной трансверсалью въ рядѣ точекъ въ инволюціи.

Что касается общаго условія того, что два пучка лучей находятся въ инволюціи, то оно можетъ быть выражено каждымъ изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\mathbf{A}\xi\xi' + \mathbf{B}(\xi + \xi') + \mathbf{D} = 0, \ldots\ldots \quad (41)$$

$$\mathbf{A}xx' + \mathbf{B}(x + x') + \mathbf{D} = 0, \ldots\ldots \quad (42)$$

гдѣ

$$\xi = \frac{sin(PX)}{sin(QX)}, \qquad \xi' = \frac{sin(PX')}{sin(QX')};$$

$$\mathbf{x} = tg(PX), \qquad \mathbf{x}' = tg(PX');$$

P и Q пара постоянныхъ лучей.

Сопоставляя эти уравненія съ общими уравненіями проэктивной зависимости двухъ пучковъ, мы видимъ, что **если проэктивные пучки лучей съ общимъ центромъ наложены другъ на друга такимъ образомъ, что два какіе нибудь луча остаются соотвѣтственными**

будемъ ли мы разсматривать, каждый изъ нихъ какъ лучь перваго или втораго пучка, то проэктивная зависимость пучковъ выразится уравненіемъ (41 или 42) **т. е. пучки будутъ находиться въ involюціи.**

Изъ уравненій (41, 42) видно, что для опредѣленія пучка лучей въ инволюціи достаточно двухъ паръ сопряженныхъ лучей.

Такъ какъ въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ съ общимъ центромъ существуетъ только два двойныхъ луча, то слѣдовательно и въ пучкѣ лучей въ инволюціи возможны только два луча, съ которыми совпадаетъ пара сопряженныхъ лучей. Лучи эти называютъ **двойными лучами инволюціи** и изъ уравненія (41, 42) видно, что они будутъ оба дѣйствительные, совпадающіе или мнимые, смотря потому будетъ ли выраженіе

$$B^2 - AD$$

больше, равно или меньше нуля.

Мы видѣли, что въ двухъ проэктивныхъ пучкахъ существуетъ вообще только одна пара соотвѣтственныхъ равныхъ прямыхъ угловъ и только въ томъ случаѣ, когда пучки равные, всѣ соотвѣтственные углы прямые. Поэтому заключаемъ, что въ системѣ лучей въ инволюціи существуетъ вообще только одна пара сопряженныхъ взаимно-перпендикулярныхъ лучей, которые очевидно суть оси инволюціи; если же этихъ лучей болѣе чѣмъ одна пара, то всѣ сопряженные лучи инволюціи взаимно-перпендикулярны, въ этомъ послѣднемъ случаѣ пучекъ лучей въ инволюціи, составленъ двумя равными пучками.

§ 24. Если назовемъ черезъ P и P' пару сопряженныхъ лучей инволюціи и положимъ

$$\xi = \frac{\sin(PX)}{\sin(P'X)}, \qquad \xi' = \frac{\sin(PX')}{\sin(P'X')},$$

то уравненіе (41) приведется къ виду

$$\xi\xi' = const \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Обозначая черезъ F и F_1 двойные лучи инволюціи, въ силу послѣдняго условія, будемъ имѣть:

$$\left\{\frac{\sin(PF)}{\sin(P'F)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin(PF_1)}{\sin(P'F_1)}\right\}^2 = const,$$

откуда

$$(PP'FF_1) = \pm 1$$

и такъ какъ изъ двухъ знаковъ возможенъ только знакъ —, то слѣдовательно **всѣ пары сопряженныхъ лучей инволюціи суть гармонически-сопряженные относительно двойныхъ лучей** и обратно: **всѣ пары лучей гармонически-сопряженные относительно двухъ постоянныхъ лучей составляютъ пучекъ лучей въ инволюціи, двойными лучами котораго будутъ эти постоянные лучи.**

Примемъ теперь въ уравненіи (41) за постоянный лучь ось I инволюціи, тогда это послѣднее уравненіе приметъ видъ

$$tg(IX)\, tg(IX') = k, \ldots\ldots\ldots (44)$$

гдѣ k постоянная величина, называемая **степенью инволюціи.**

Предполагая, что лучь X совпадаетъ съ X', изъ послѣдняго равенства получимъ:

$$tg^2(IX) = k$$

откуда заключаемъ, что **оси инволюціи суть биссекторы угловъ, составляемыхъ двойными лучами.**

Если въ уравненіи (44) k величина положительная, то пучки O и O', находящіеся въ инволюціи, имѣютъ разное направленіе и инволюцію называютъ **гиперболической.** Называя черезъ G, H и G', H' особенные лучи пучковъ O и O', образующіе одинаковые углы съ противуположными лучами, мы видимъ, что въ этомъ случаѣ существуютъ всегда два дѣйствительные двойные луча, которые называютъ **ассимптотами** гиперболической инволюціи и съ которыми совпадаютъ лучи G и G', H и H'.

Въ частномъ случаѣ, когда $k = +1$ т. е. пучки O и O' равные и разнаго направленія, то всѣ пары сопряженныхъ лучей, а слѣдовательно и ассимптоты взаимно-перпендикулярны; инволюцію эту называютъ **гиперболической-равностороннею** или **симметрическою.** Поэтому, всѣ пары лучей, проходящіе черезъ одну и ту-же точку и образующіе равные углы съ какимъ нибудь постояннымъ лучемъ, составляютъ гиперболическую-равностороннюю инволюцію.

Если въ уравненіи (44) k величина отрицательная, то пучки O и O' имѣютъ одинаковое направленіе и ихъ двойные лучи мнимые. При этомъ совпадаютъ лучи G и H', H и G' и инволюцію называютъ **эллиптическою.**

Въ частномъ случаѣ, когда $k = -1$, всѣ пары сопряженныхъ лучей взаимно-перпендикулярны и пучки O и O' равные и одинаковаго направленія. Инволюцію эту называютъ **круговою** (Kreissystem).

Такъ какъ пучекъ лучей въ инволюціи пересѣкается трансверсалью въ рядѣ точекъ въ инволюціи, то, очевидно, что построеніе двойныхъ лучей и вообще паръ сопряженныхъ лучей пучка въ инволюціи приводится къ построенію двойныхъ точекъ и паръ сопряженныхъ точекъ ряда въ инволюціи. Что касается осей инволюціи, то онѣ найдутся, какъ линіи, дѣлящія пополамъ углы между двойными лучами.

Въ силу той-же проэктивной зависимости рядовъ и пучковъ въ инволюціи, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Если для опредѣленія пучка лучей въ инволюціи даны двѣ пары сопряженныхъ лучей, то инволюція будетъ эллиптическая или гиперболическая, смотря потому раздѣляется ли каждая пара лучей другою или нѣтъ.

Четыре прямыя въ плоскости, проходящія черезъ одну и ту-же точку и разсматриваемыя какъ двѣ пары сопряженныхъ лучей, опредѣляютъ три различныя инволюціи, изъ которыхъ всегда одна эллиптическая (E) а двѣ другія гиперболическія (H_1) и (H_2). Если черезъ ту же точку проведемъ произвольный лучь и назовемъ черезъ E, H_1, H_2 сопряженные съ нимъ лучи кажой изъ трехъ инволюцій, то лучи H_1 и H_2 составятъ пару сопряженныхъ лучей инволюціи (E), E и H_2 пару лучей инволюціи (H_1), E и H_1 пару лучей инволюціи (H_2).

25. Если лучи C и C' представляютъ пару сопряженныхъ лучей пучка въ инволюціи, опредѣляемаго двумя парами лучей A и A', B и B', то эти шесть лучей называютъ **шестью лучами въ инволюціи.**

Обращаясь къ условію (41), мы легко убѣдимся, подобно тому какъ въ § 22, что **три пары сопряженныхъ лучей, проходящихъ черезъ одну и ту-же точку, находятся въ инволюціи, если ангармоническое отношеніе четырехъ лучей, взятыхъ изъ трехъ паръ, равно ангармоническому отношенію лучей имъ сопряженныхъ.**

Отсюда заключаемъ, что **если на плоскости даны два проэктивные пучка лучей** $A, B, C, \ldots$ **и** $A', B', C', \ldots$ **съ общимъ центромъ, то ихъ двойные лучи съ каждыми двумя парами какъ** A, B'; A', B **составляютъ шесть лучей въ инволюціи.**

Пользуясь тѣмъ-же предложеніемъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ семи условіямъ того, что три пары лучей A, A'; B, B'; C, C' находятся въ инволюціи:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin(AB).\sin(AB')}{\sin(AC).\sin(AC')} &= \frac{\sin(A'B).\sin(A'B')}{\sin(A'C).\sin(A'C')},\\
\frac{\sin(BC).\sin(BC')}{\sin(BA).\sin(BA')} &= \frac{\sin(B'C).\sin(B'C')}{\sin(B'A).\sin(B'A')},\\
\frac{\sin(CA).\sin(CA')}{\sin(CB).\sin(CB')} &= \frac{\sin(C'A).\sin(C'A')}{\sin(C'B).\sin(C'B')};
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(AB').\sin(BC').\sin(CA') &= -\sin(A'B).\sin(B'C).\sin(C'A);\\
\sin(AB').\sin(BC).\sin(C'A') &= -\sin(A'B).\sin(B'C').\sin(CA),\\
\sin(AB).\sin(B'C).\sin(C'A') &= -\sin(A'B').\sin(BC').\sin(CA),\\
\sin(AB).\sin(B'C').\sin(CA') &= -\sin(A'B').\sin(BC).\sin(C'A).
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Каждое изъ этихъ семи условій очевидно влечетъ за собой и остальные шесть.

Называя черезъ

$$\alpha, \alpha'; \quad \beta, \beta'; \quad \gamma, \gamma'$$

и

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'; \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$$

значенія ξ, ξ' и $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ въ уравненіяхъ (41) и (42), соотвѣтствующія лучамъ A, A'; B, B'; C, C', мы, подобно какъ въ § 22, найдемъ условія (33) и (38) того, что эти шесть лучей находятся въ инволюціи; а также убѣдимся, что, если двѣ пары лучей опредѣляются уравненіями (36) или (39), то каждая третья пара пучка въ инволюціи опредѣлится уравненіемъ (37) или (40).

Свойства проэктивныхъ пучковъ лучей, находящихся въ инволюціи, легко могутъ быть примѣнены и къ проэктивнымъ пучкамъ плоскостей съ общей осью, находящимся въ инволюціи т. е. расположеннымъ такимъ образомъ, что каждой плоскости, разсматриваемой какъ элементъ перваго пучка или какъ элементъ втораго пучка, соотвѣтсвуетъ въ обоихъ случаяхъ одна и таже плоскость.

---

§ 26. При помощи инволюціи можно рѣшить слѣдующій вопросъ.

Предположимъ, что даны три элемента a, b, c какого нибудь образа (ряда точекъ, пучка лучей или пучка плоскостей) и требуется найти еще одинъ элементъ d того-же образа такой, чтобы всѣ возможныя ангармоническія отношенія этихъ четырехъ элементовъ были-бы равны между собой. Въ этомъ случаѣ систему элементовъ a, b, c, d называютъ **системой равныхъ ангармоническихъ отношеній** (Aequianharmonisches System).

Очевидно, что для выполненія такого условія достаточно, чтобы были равны между собой основныя ангармоническія отношенія (§ 2)

$$\lambda = (abcd), \qquad \mu = (acdb), \qquad \nu = (adbc)$$

и такъ какъ

$$\mu = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad \nu = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

то отношенія λ, μ, ν будутъ равны между собой, если будутъ равны между собой два какія нибудь изъ нихъ, ибо, полагая напр.

$$\lambda = \mu \qquad \text{т. е.} \qquad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \ldots . \quad (47)$$

будемъ имѣть:

$$\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda} \qquad \text{т. е.} \qquad \lambda = \nu$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для рѣшенія предложеннаго вопроса достаточно найти такой элементъ d, чтобы

$$(abcd) = (acdb)$$

или, что тоже, чтобы

$$(abcd) = (cabd).$$

Возьмемъ въ данномъ образѣ какой нибудь элементъ x и опредѣлимъ элементъ x' того-же образа такъ, чтобы

$$(abcx) = (cabx').$$

Если затѣмъ будемъ перемѣнять положеніе элемента x, то получимъ два проэктивныхъ образа V и V', въ

которыхъ элементамъ a, b, c, x образа V будутъ соотвѣтствовать элемементы c, a, b, x' образа V'. Называя черезъ d и d_1 двойные элементы этихъ образовъ, будемъ имѣть:

$$(abcd) = (cabd), \qquad (abcd_1) = (cabd_1)$$

и слѣдовательно требуемому условію удовлетворяетъ каждый изъ элементовъ d и d_1.

Замѣтивъ это, назовемъ черезъ α, β, γ элементы, удовлетворяющіе слѣдующимъ равенствамъ:

$$(bca\alpha) = -1, \quad (cab\beta) = -1, \quad (abc\gamma) = -1; \quad (48)$$

тогда будемъ имѣть

$$(bca\alpha) = (cab\beta) = (abc\gamma),$$

откуда находимъ

$$(abc\alpha) = (cab\gamma),$$
$$(abc\beta) = (cab\alpha),$$
$$(abc\gamma) = (cab\beta).$$

Равенства эти показываютъ, что α, β, γ и γ, α, β суть соотвѣтственные элементы проэктивныхъ образовъ V и V' и слѣдовательно

$$(\alpha\beta\gamma d) = (\gamma\alpha\beta d), \qquad (\alpha\beta\gamma d_1) = (\gamma\alpha\beta d_1)$$

т. е. элементы α, β, γ, d и α, β, γ, d_1 составляютъ двѣ системы равныхъ ангармоническихъ отношеній.

Изъ тѣхъ же равенствъ (48), замѣчая, что $(cab\beta) = (acb\beta) = -1$, будемъ имѣть:

$$(acb\beta) = (abc\gamma)$$

отсюда видно, что, если будемъ разсматривать b и c, β и γ какъ двѣ пары сопряженныхъ элементовъ въ инволюціи, то a будетъ двойной элементъ и такъ какъ $(bca\alpha) = -1$, то слѣдовательно α будетъ другой двойной элементъ тойже инволюціи. Поэтому a и α должны быть гармонически-сопряженные элементы по отношенію къ β и γ и слѣдовательно

$$(bca\alpha) = (\beta\gamma\alpha a) = -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ *)$$

откуда заключаемъ, что

$$b,\ c,\ a,\ \alpha$$

и

$$\beta,\ \gamma,\ \alpha,\ a$$

суть соотвѣтственные элементы двухъ проэктивныхъ образовъ и потому три пары элементовъ

$$a,\ \alpha;\qquad b,\ \beta;\qquad c,\ \gamma$$

находятся въ инволюціи **). Постараемся теперь показать, что двойные элементы этой инволюціи будутъ d и d_1.

Такъ какъ d и d_1 — двойные элементы проэктивныхъ образовъ

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\qquad \text{и}\qquad c,\ a,\ b,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta,$$

то слѣдовательно (§ 17)

---

*) Подобнымъ же образомъ убѣдимся что и $(\gamma\alpha\beta b) = -1$, $(\alpha\beta\gamma c) = -1$. Равенства эти вмѣстѣ съ равенствомъ $(\beta\gamma\alpha a) = -1$ показываютъ, что элементы a, b, c по отношенію къ α, β, γ играютъ ту-же роль какъ и эти послѣдніе по отношенію къ первымъ.

**) *Staudt* — Geometrie der Lage, Nürnberg. 1847. s. 121.

$$(a\,c\,d\,d_1) = (b\,a\,d\,d_1) = (\alpha\,\gamma\,d\,d_1) = (\beta\,\alpha\,d\,d_1) = \ldots = m;$$

откуда

$$\frac{ad}{ad_1} = m\,\frac{cd}{cd_1}, \qquad \frac{bd}{bd_1} = m\,\frac{ad}{ad_1}, \ldots\ldots$$

$$\frac{\alpha d}{\alpha d_1} = m\,\frac{\gamma d}{\gamma d_1}, \qquad \frac{\beta d}{\beta d_1} = m\,\frac{\alpha d}{\alpha d_1}, \ldots\ldots$$

Раздѣляя первыя изъ этихъ уравненій на вторыя, находимъ:

$$(a\,\alpha\,d\,d_1) = (c\,\gamma\,d\,d_1) \quad \text{и} \quad (b\,\beta\,d\,d_1) = (a\,\alpha\,d\,d_1)$$

и слѣдовательно

$$(a\,\alpha\,d\,d_1) = (b\,\beta\,d\,d_1) = (c\,\gamma\,d\,d_1)$$

Равенства эти показываютъ, что d и d_1 суть двойные элементы проэктивныхъ образовъ

$$b,\ c,\ a,\ \alpha \qquad \text{и} \qquad \beta,\ \gamma,\ \alpha,\ a$$

а слѣдовательно и инволюціи

$$a,\ \alpha; \qquad b,\ \beta; \qquad c,\ \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ ^*)$$

Итакъ, чтобы къ даннымъ тремъ элементамъ a, b, c найти четвертый элементъ, который съ первыми тремя составилъ бы систему равныхъ ангармоническихъ отношеній, нужно найти элементы α, β, γ, удовлетворяющіе условіямъ:

$$(b\,c\,a\,\alpha) = -1, \quad (c\,a\,b\,\beta) = -1, \quad (a\,b\,c\,\gamma) = -1$$

---

*) *Staudt* — Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1857. Heft — 2. s. 178.

и затѣмъ двойные элементы инволюціи

$$a, \alpha; \quad b\ \beta; \quad c\ \gamma$$

Каждый изъ двойныхъ элементовъ будетъ составлять съ элементами a, b, c а равно и съ элементами α, β, γ систему равныхъ ангармоническихъ отношеній.

Изъ предыдущаго также видно, что если два элемента изъ данныхъ совпадаютъ въ одинъ, то съ нимъ совпадутъ и элементы d и d_1.

Если элементы a, b, c, d составляютъ систему равныхъ ангармоническихъ отношеній, то величина λ каждаго изъ этихъ отношеній опредѣляется уравненіемъ (47), т. е. λ равно одному изъ мнимыхъ корней третей степени изъ — 1 и слѣдовательно всѣ четыре элемента a, b, c, d не могутъ быть одновременно дѣйствительные, поэтому, если данные три элемента a, b, c дѣйствительные, то элементы d и d_1 мнимые т. е. инволюція a, α; b, β; c, γ эллиптическая.

Инволюціонныя свойства полнаго четыреугольника и четырехсторонника. Основныя предложенія теоріи трансверсалей.

§ 27. Предпололожимъ (фиг. 36), что на плоскости даны четыре точки A, B, C, D, опредѣляющія полный четыреугольникъ и, проведя произвольную трансверсаль L, назовемъ точки ея пересѣченія съ противуположными сторонами BC и AD, AC и BD, AB и CD четыреугольника соотвѣтственно черезъ a и a_1, b и b_1, c и c_1. Тогда, обозначивъ черезъ E точку пересѣченія сторонъ BC и AD и соединивъ точки A и D съ a, получимъ два пучка лучей $A\,|\,E\,a\,B\,C\,|$ и $D\,|\,E\,a\,B\,C\,|$, которые будутъ находиться

въ проэктивной зависимости, ибо ихъ ангармоническія отношенія равны ангармоническому отношенію точекъ E, a, B, C. Поэтому въ пересѣченіи этихъ пучковъ съ трансверсалью L получимъ два проэктивные ряда a_1, a, c, b, и a_1, a, b_1, c_1 и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(a_1\, a\, c\, b) = (a_1\, a\, b_1\, c_1)$$

или, такъ какъ

$$(a_1\, a\, b_1\, c_1) = (a\, a_1\, c_1\, b_1),$$

то

$$(a_1\, a\, c\, b) = (a\, a_1\, c_1\, b_1)$$

Равенство это показываетъ, что пары точекъ a, a_1; b, b_1; c, c_1 находятся въ инволюціи и слѣдовательно **всякая трансверсаль, проведенная въ плоскости полнаго четыреугольника, пересѣкаетъ противуположныя его стороны въ трехъ парахъ сопряженныхъ точекъ въ инволюціи** (въ шести точкахъ въ инволюціи). Предложеніе это можетъ быть высказано еще и въ слѣдующей формѣ.

Если изъ какой-нибудь точки D проведемъ лучи чрезъ вершины треугольника ABC, то всякая трансверсаль пересѣкается этими лучами и сторонами треугольника въ трехъ парахъ точекъ a, a_1; b, b_1; c, c_1 въ инволюціи.

Инволюціонное свойство полнаго четыреугольника заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, гармоническое свойство. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что трансверсаль проходитъ черезъ діагональныя точки четыреугольника, эти послѣднія должно разсматривать, какъ ассимптотическія точки инволюціи, опредѣляемой на трансверсали сто-

ронами полнаго четыреугольника и слѣдовательно діагональныя точки должны составлять пару гармонически-сопряженныхъ точекъ по отношенію къ парѣ точекъ пересѣченія трансверсали съ двумя сторонами четыреугольника.

Въ § 21 мы видѣли, что инволюція, опредѣляемая двумя парами точекъ на прямой, будетъ эллиптическая или гиперболическая, смотря потому раздѣляется ли отрѣзокъ между каждой парой точками другой пары или нѣтъ. Примѣняя это правило къ разсматриваемому случаю, мы приходимъ къ заключенію, что инволюція, опредѣляемая сторонами полнаго четыреугольника на произвольно проведенной трансверсали, будетъ эллиптическая или гиперболическая, смотря потому будетъ ли по обѣ стороны трансверсали лежать нечетное число сторонъ (три по одну сторону и одна по другую) или же четное (двѣ или четыре по одну сторону и двѣ или ни одной по другую). Это правило остается справедливымъ, если вершины четыреугольника расположены какъ показано на чертежѣ т. е. такъ, что каждая изъ нихъ лежитъ внѣ треугольника, составляемаго тремя другими. Если-же вершины расположены такъ, что одна изъ нихъ лежитъ внутри треугольника, образуемаго тремя другими, то инволюція будетъ эллиптическая или гиперболическая, смотря потому будетъ ли по обѣ стороны трансверсали лежать четное или нечетное число вершинъ.

На основаніи инволюціоннаго свойства полнаго четыреугольника можно, по даннымъ двумъ парамъ точекъ на прямой, построить сколько угодно паръ точекъ въ инволюціи. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что для опредѣленія инволюціи на прямой L (фиг. 36) даны двѣ пары точекъ a, a_1; b, b_1, тогда, для построенія точки c_1 сопряженной съ какой-нибудь точкой c прямой L, поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ c произвольную прямую и, взявъ на ней двѣ какія-нибудь точки A и B, соединяемъ A съ a_1 и b и B съ a и b_1; затѣмъ опредѣливъ точки

$$C = (Ab, Ba) \quad \text{и} \quad D = (Aa_1, Bb_1),$$

проводимъ прямую CD, которая и пересѣчетъ линію L въ искомой точкѣ c_1, ибо шесть точекъ a, a_1; b b_1; c, (CD, L) пересѣченія прямой L съ сторонами четыреугольника $ABCD$ должны находиться въ инволюціи.

Предположимъ теперь (фиг. 37), что на плоскости даны четыре прямыя AC, A_1C_1, AC_1, A_1C, составляющія полный четырехсторонникъ и соединимъ его вершины съ произвольной точкой O плоскости. Тогда получимъ четыреугольникъ $OABC$, стороны котораго пересѣкаются трансверсалью A_1C_1 въ трехъ парахъ точекъ A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 въ инволюціи, поэтому пучекъ $O\,|\,A, A_1, B, B_1, C, C_1\,|$ будетъ пучекъ лучей въ инволюціи, сопряженными лучами котораго будутъ лучи OA, OA_1; OB, OB_1; OC, OC_1. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что **три пары прямыхъ, соединяющихъ какую-нибудь точку плоскости съ противуположными вершинами полнаго четырехсторонника, составляютъ пучекъ лучей въ инволюціи** (шесть лучей въ инволюціи). Предложеніе это можетъ быть высказано еще и въ слѣдующей формѣ.

Лучи OA, OA_1; OB, OB_1; OC, OC_1, проведенные изъ произвольной точки O черезъ вершины A, B, C треугольника и черезъ точки пересѣченія какой-нибудь трансверсали съ противулежащими сторонами, составляютъ три пары лучей въ инволюціи.

§ 28. Возвратимся къ первому изъ предложеній предыдущаго § и допустимъ (фиг. 36), что одна изъ вершинъ полнаго четыреугольника $ABCD$, напр. D, лежитъ въ безконечности, тогда прямыя (фиг. 36 bis) AD, BD, CD параллельны между собой и, въ силу инволюціоннаго свойства полнаго четыреугольника, точки a, a_1; b, b_1; c, c_1 находятся въ инволюціи. Поэтому на основаніи перваго изъ уравненій (32) будемъ имѣть:

$$ab_1 \cdot bc_1 \cdot ca_1 = -a_1b \cdot b_1c \cdot c_1a$$

или

$$\frac{ab_1 \cdot bc_1 \cdot ca_1}{ac_1 \cdot ba_1 \cdot cb_1} = 1.$$

Но изъ чертежа видно, что

$$\frac{ab_1}{ac_1} = \frac{aB}{aC}, \quad \frac{bc_1}{ba_1} = \frac{bC}{bA}, \quad \frac{ca_1}{cb_1} = \frac{cA}{cB},$$

поэтому находимъ

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Равенство это выражаетъ слѣдующую теорему Менелая.

Если стороны треугольника ABC пересѣчены какой-нибудь трансверсалью въ точкахъ a, b, c, то эти послѣднія отсѣкаютъ на сторонахъ треугольника три пары отрѣзковъ aB и aC, bC и bA, cA и cB и произведеніе трехъ непослѣдовательныхъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ остальныхъ *).

*) Эта теорема извѣстна подъ названіемъ теоремы Птоломея, но она не принадлежитъ ему, такъ какъ встрѣчается въ сочиненіи Менелая, геоме-

Предположимъ теперь (фиг. 38), что черезъ вершины A, B, C треугольника проведены три какія-нибудь прямыя, которыя встрѣчаютъ противуположныя стороны въ точкахъ a, b, c. Тогда, какъ легко видѣть, всегда будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\frac{aB \,.\, bC \,.\, cA}{aC \,.\, bA \,.\, cB} = \frac{\sin aAB \,.\, \sin bBC \,.\, \sin cCA}{\sin aAC \,.\, \sin bBA \,.\, \sin cCB}, \quad \ldots \quad (50)$$

Такъ какъ каждое отношеніе отрѣзковъ, такое какъ $\frac{aB}{aC}$ очевидно имѣетъ тотъ-же знакъ, какъ и отношеніе соотвѣтствующихъ синусовъ $\frac{\sin aAB}{\sin aAC}$, то слѣдовательно достаточно доказать, что обѣ части уравненія (50) равны численно.

Но изъ чертежа видно, что

$$\frac{aB}{aA} = \frac{\sin aAB}{\sin ABC}, \qquad \frac{aC}{aA} = \frac{\sin aAC}{\sin ACB},$$

откуда, раздѣля первое равенство на второе, находимъ:

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\sin aAB}{\sin aAC} \cdot \frac{\sin ACB}{\sin ABC}.$$

Подобнымъ-же путемъ найдемъ:

$$\frac{bC}{bA} = \frac{\sin bBC}{\sin bBA} \cdot \frac{\sin BAC}{\sin ACB}, \qquad \frac{cA}{cB} = \frac{\sin cCA}{\sin cCB} \cdot \frac{\sin ABC}{\sin BAC}.$$

тра жившаго почти столѣтіемъ раньше Птоломея. См. *Chastes* Géom. sup. p. 274 или-же его исторію геометріи стр. 28. (Математическій Сборникъ т. V выпускъ 2-й).

Перемножая послѣднія три равенства, получимъ уравненіе (50).

Если теперь три точки a, b, c лежатъ на одной прямой, то первая часть уравненія (50) равна $+1$, поэтому заключаемъ, что, **если черезъ вершины** A, B, C (фиг. 39) **треугольника проведемъ три прямыя, пересѣкающія противуположныя стороны въ точкахъ** a, b, c, **лежащихъ на одной прямой, то между синусами угловъ, составляемыхъ каждой изъ этихъ прямыхъ съ двумя сторонами, существуетъ соотношеніе:**

$$\frac{\sin aAB \,.\, \sin bBC \,.\, \sin cCA}{\sin aAC \,.\, \sin bBA \,.\, \sin cCB} = 1 \ldots\ldots\ldots (51)$$

Очевидно, что имѣетъ мѣсто и теорема обратная теоремамъ, выражаемымъ равенствами (49) и (51) т. е. **если три точки** a, b, c **на сторонахъ треугольника** ABC **таковы, что имѣетъ мѣсто равенство** (49) **или** (51), **то эти три точки лежатъ на одной прямой.**

Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ черезъ c' точку въ которой прямая ab встрѣчаетъ сторону AB, тогда будемъ имѣть:

$$\frac{aB \,.\, bC \,.\, c'A}{aC \,.\, bA \,.\, c'B} = 1$$

и такъ какъ по предположенію имѣетъ мѣсто равенство (49), то слѣдовательно

$$\frac{c'A}{c'B} = \frac{cA}{cB}$$

т. е. точка c' совпадаетъ съ точкой c. Подобное же разсужденіе можетъ быть примѣнено и къ уравненію (51).

Обратимся теперь къ инволюціонному свойству полнаго четырехсторонника и предположимъ въ фигурѣ (37),

что одна изъ сторонъ четырехсторонника напр. сторона A_1C_1 лежитъ въ безконечности. Тогда точки пересѣченія стороны A_1C_1 съ діагоналями AA_1, BB_1, CC_1 удалятся въ безконечность, поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ діагонали будутъ прямыя, проведенныя черезъ вершины A, B, C треугольника ABC параллельно противулежащимъ сторонамъ и слѣдовательно лучи OA_1, OB_1, OC_1 будутъ также параллельны сторонамъ треугольника ABC. Отсюда заключаемъ, что три луча OA, OB, OC (фиг. 37 bis), проведенные изъ произвольной точки O черезъ вершины треугольника ABC и три луча OA_1, OB_1, OC_1, проведенные изъ той-же точки O параллельно сторонамъ BC, AC, AB, составятъ пучекъ лучей въ инволюціи, при чемъ парами сопряженныхъ лучей будутъ лучи OA, OA_1; OB, OB_1; OC, OC_1. Поэтому, на основаніи перваго изъ уравненій (46), будемъ имѣть:

$$\sin AOB_1 . \sin BOC_1 . \sin COA_1 = -\sin A_1OB . \sin B_1OC . \sin C_1OA$$

откуда, замѣчая, что стороны BC, AC, AB параллельны лучамъ OA_1, OB_1, OC_1, найдемъ:

$$\frac{\sin OAB . \sin OBC . \sin OCA}{\sin OAC . \sin OBA . \sin OCB} = -1 .$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что, **если соединимъ вершины треугольника ABC съ какой-нибудь точкой O плоскости, то между синусами угловъ, составляемыхъ каждой изъ этихъ прямыхъ съ двумя сторонами, существуетъ соотношеніе:**

$$\frac{\sin OAB . \sin OBC . \sin OCA}{\sin OAC . \sin OBA . \sin OCB} = -1 \ldots\ldots (52)$$

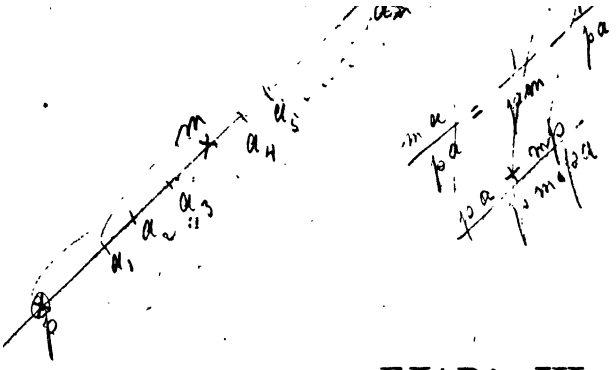
Называя черезъ a, b, c точки пересѣченія лучей OA, OB, OC съ сторонами BC, AC, AB и замѣняя, въ силу уравненія (50), синусы угловъ отрѣзками, образуемыми этими тремя лучами на сторонахъ треугольника, мы приходимъ къ заключенію, что **три прямыя, проведенныя изъ одной точки черезъ вершины** A, B, C **треугольника, встрѣчаютъ противуположныя стороны въ трехъ такихъ точкахъ** a, b, c, **что**

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Эта теорема извѣстна подъ именемъ теоремы Чева *).

Очевидно, что имѣетъ мѣсто и теорема обратная двумъ послѣднимъ т. е. **если три прямыя, проходящія черезъ вершины треугольника** ABC **таковы, что имѣетъ мѣсто равенство** (52) **или** (53), **то эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ**.

*) Жанъ Чева итальянскій геометръ, жившій въ концѣ XVII-го и началѣ XVIII-го столѣтія.



ГЛАВА III.

Гармоническія центры, оси и плоскости.

---

§ 29. Предположимъ, что на прямой даны n точекъ a_1, a_2, a_3, ... a_n и нѣкоторая постоянная точка p, которую мы будемъ называть полюсомъ. Найдемъ на той-же прямой такую точку m, чтобы сумма произведеній по r изъ отношеній

$$\frac{ma_1}{pa_1}, \frac{ma_2}{pa_2}, \frac{ma_3}{pa_3}, \ldots\ldots \frac{ma_n}{pa_n}$$

равнялась нулю.

Если обозначимъ эту сумму черезъ $\Sigma\left(\frac{ma}{pa}\right)_r$, то точка m опредѣлится уравненіемъ

$$\Sigma\left(\frac{ma}{pa}\right)_r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или, что то-же, уравненіемъ

$$\Sigma\left(\frac{1}{pm} - \frac{1}{pa}\right)_r = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ибо $ma = pa - pm$.

Раскрывъ первую часть уравненія (2), получимъ:

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots.r}\left(\frac{1}{pm}\right)^r -$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots.(r-1)}\left(\frac{1}{pm}\right)^{r-1}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_1 +$$

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots.(r-2)}\left(\frac{1}{mp}\right)^{r-2}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_2 - \ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^r\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_r = 0, \ldots\ldots\ldots (3)$$

откуда, раздѣляя на коефиціентъ при первомъ членѣ, найдемъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія точки m:

$$\left(\frac{1}{pm}\right)^r - \frac{r}{n}\left(\frac{1}{pm}\right)^{r-1}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_1 + \frac{r(r-1)}{n(n-1)}\left(\frac{1}{pm}\right)^{r-2}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_2 - \ldots$$

$$\ldots. + (-1)^s\frac{r(r-1)\ldots.(r-s+1)}{n(n-1)\ldots.(n-s+1)}\left(\frac{1}{mp}\right)^{r-s}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_s \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^r\frac{r(r-1)\ldots.2.1}{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_r = 0 \ldots. (3')$$

Уравненіе это r-ой степени относительно pm и слѣдовательно доставитъ r значеній для pm. Называя эти значенія черезъ

$$pm_1,\quad pm_2,\quad pm_3,\ldots. pm_r,$$

мы видимъ, что для точки m, удовлетворяющей условію (1), возможно r положеній

$$m_1,\quad m_2,\quad m_3,\ldots. m_r.$$

Эти r точекъ называютъ **гармоническими центрами** *) r-го порядка системы точекъ

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots\ldots a_n,$$

по отношенію къ плюсу p.

Предполагая въ уравненіи (2) $r = 1$, получимъ равенство

$$\frac{n}{pm} = \frac{1}{pa_1} + \frac{1}{pa_2} + \frac{1}{pa_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{pa_n}, \ldots\ldots (4)$$

которое опредѣлитъ положеніе гармоническаго центра m перваго порядка. Въ этомъ случаѣ Маклорень называетъ разстояніе pm **среднимъ гармоническимъ** разстояній $pa_1, pa_2, \ldots\ldots pa_n$ **), а Понселэ — точку m **центромъ среднихъ гармоническихъ** точекъ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ***).

Если въ уравненіи (4) $n = 2$, то будемъ имѣть:

$$\frac{2}{pm} = \frac{1}{pa_1} + \frac{1}{pa_2}$$

и слѣдовательно (см. гл. I, ур. 8) въ этомъ случаѣ точки p и m суть гармонически-сопряженныя точекъ a_1 и a_2.

---

*) *Ionquières* — Mémoire sur la théorie des pôles et polaires dans les courbes d'ordre quelconque etc. Vid. Journal de M. Liouville, aout, 1857, p. 266.

Cremona — Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven Dtsch. v. Curtze. Greifswald. 1865 s. 16. (Изъ этого сочиненія взято содержаніе настоящей главы).

**) De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus, § 28 (см. *Chasles* — Traité de Géométrie Supérieure p. 43.

***) *Poncelet* — Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques. Vid Crelle's Journal t. III, s. 229.

Написавъ уравненіе (4) въ формѣ

$$\frac{n+1}{pm} = \frac{1}{pm} + \frac{1}{pa_1} + \frac{1}{pa_2} + \ldots + \frac{1}{pa_n}$$

мы видимъ, что, **если m есть гармоническій центръ перваго порядка системы a_1, a_2, a_3; .... a_n по отношенію къ полюсу p, то m будетъ также гармоническимъ центромъ перваго порядка системы m, a_1, a_2, a_3, ... a_n по отношенію къ тому-же полюсу.**

Если помножимъ уравненіе (1) на $\frac{pa_1 \cdot pa_2 \ldots pa_n}{ma_1 \cdot ma_2 \ldots ma_n}$, то получимъ равенство

$$\Sigma \left(\frac{pa}{ma}\right)_{n-r} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

которое показываетъ, что точка p есть гармоническій центръ $(n-r)$-го порядка системы a_1, a_2, ... a_n по отношенію къ полюсу m.

Поэтому, **если m есть гармоническій центръ порядка r нѣкоторой системы n точекъ по отношенію къ полюсу p, то обратно p есть гармоническій центръ $(n-r)$-го порядка той-же системы но по отношенію къ полюсу m.**

Найдемъ теперь зависимость между гармоническими центрами различныхъ порядковъ.

Назовемъ черезъ μ гармоническій центръ порядка s системы точекъ

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \ldots . m_r$$

по отношенію къ полюсу p; тогда будемъ имѣть (см. ур. 3′)

$$\left(\frac{1}{p\mu}\right)^s - \frac{s}{r}\left(\frac{1}{p\mu}\right)^{s-1}\Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_1 + \frac{s(s-1)}{r(r-1)}\left(\frac{1}{p\mu}\right)^{s-2}\Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^s \frac{s(s-1)\ldots 2.1}{r(r-1)\ldots(r-s+1)}\Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_s = 0 \ldots (6)$$

Если теперь предположимъ, что m_1, m_2, m_3, $\ldots m_r$ суть гармоническіе центры r-го порядка системы a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, то въ силу уравненія (3′) будемъ имѣть:

$$\Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_1 = \frac{r}{n}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_1, \quad \Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_2 = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_2, \ldots$$

$$\ldots \Sigma\left(\frac{1}{pm}\right)_s = \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_s.$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (6), получимъ:

$$\left(\frac{1}{p\mu}\right)^s - \frac{s}{n}\Sigma\left(\frac{1}{p\mu}\right)^{s-1}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_1 + \frac{s(s-1)}{n(n-1)}\left(\frac{1}{p\mu}\right)^{s-2}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^s \frac{s(s-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_s = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ (3′), мы видимъ, что μ будетъ гармоническій центръ s-го порядка системы a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: **если m_1, m_2, m_3, $\ldots m_r$ суть гармоническіе центры r-го порядка системы a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ по отношенію къ плюсу p, то гармоническіе центры порядка s $(s < r)$ системы m_1, m_2, m_3, $\ldots m_r$ по отношенію къ полюсу p будутъ въ то-же время гармоническими центрами s-го порядка системы a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ по отношенію къ тому-же полюсу.**

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію свойствъ гармоническихъ центровъ по отношенію къ различнымъ полюсамъ. Предположимъ, что m будетъ гармоническій центръ $(n-1)$-го порядка системы

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots a_n$$

по отношенію къ полюсу p; тогда, какъ мы видѣли, p будетъ гармоническій центръ перваго порядка той-же системы по отношенію къ полюсу m. Поэтому между точками m и p должна существовать зависимость

$$\frac{n}{mp} = \Sigma\left(\frac{1}{ma}\right)_1.$$

назовемъ черезъ o произвольную точку прямой, на которой расположены данныя точки, тогда будемъ имѣть:

$$mp = op - om\,,\qquad ma = oa - om$$

и слѣдовательно послѣднее равенство приметъ видъ:

$$\frac{n}{om-op} = \Sigma\left(\frac{1}{om-oa}\right),$$

откуда, замѣчая, что

$$\Sigma\left(\frac{1}{om-oa}\right)_1 =$$

$$\frac{n\,\overline{om}^{n-1} - (n-1)\,\overline{om}^{n-2}\Sigma(oa)_1 + (n-2)\,\overline{om}^{n-3}\Sigma(oa)_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\Sigma(oa)_{n-1}}{om^n - om^{n-1}\Sigma(oa)_1 + om^{n-2}\Sigma(oa)_2 - \ldots + (-1)^n\Sigma(oa)_n},$$

получимъ уравненіе:

$$\overline{om}^{n-1}\left\{n\,.\,op-\Sigma(oa)_1\right\}-\overline{om}^{n-2}\left\{(n-1)\,op\,\Sigma(oa)_1-2\,\Sigma(oa)_2\right\}+$$

$$\overline{om}^{n-3}\left\{(n-2)\,.\,op\,\Sigma(oa)_2-3\,\Sigma(oa)_3\right\}-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots(-1)^{n-1}\left\{op\,.\,\Sigma(oa)_{n-1}-n\,\Sigma(oa)_n\right\}=0,\ \ldots\ldots\ (7)$$

которое можетъ быть разсматриваемо, какъ условіе того, что точка m есть гармоническій центръ $(n-1)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p.

Пусть различныя положенія точки m, опредѣляемыя этимъ уравненіемъ, будутъ $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$. Назовемъ черезъ μ гармоническій центръ $(n-2)$-го порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ по отношенію къ нѣкоторому полюсу π; тогда π будетъ гармоническій центръ перваго порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ по отношенію къ полюсу μ и слѣдовательно будетъ имѣть мѣсто уравненіе (см. урав. 7)

$$o\mu^{n-2}\left\{(n-1)\,o\pi-\Sigma(om)_1\right\}-o\mu^{n-3}\left\{(n-2)\,o\pi\,\Sigma(om)_1-2\,\Sigma(om)_2\right\}$$

$$+\,o\mu^{n-4}\left\{(n-3)\,o\pi\,\Sigma(om)_2-3\,\Sigma(om)_3\right\}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\left\{o\pi\,\Sigma(om)_{n-2}-(n-1)\,\Sigma(om)_{n-1}\right\}=0\ldots\ldots\ (8)$$

Но изъ уравненія (7) имѣемъ, что

$$\Sigma(om)_k=\frac{(n-k)\,op\,\Sigma(oa)_k-(k+1)\,\Sigma(oa)_{k+1}}{n\,.\,op-\Sigma(oa)_1},$$

поэтому, подставляя въ уравненіе (8) вмѣсто $\Sigma(om)_1$, $\Sigma(om)_2, \ldots$ величины, доставляемыя послѣднимъ равенствомъ, получимъ:

$$op \cdot o\pi \Big\{ n(n-1)\,\overline{o\mu}^{n-2} - (n-1)(n-2)\,\overline{o\mu}^{n-3}\,\Sigma(oa)_1 + (n-2)(n-3)\,\overline{o\mu}^{n-4}\,\Sigma(oa)_2 - \ldots\ldots \Big\}$$
$$-(op+o\pi) \Big\{ (n-1)\,\overline{o\mu}^{n-2}\,\Sigma(oa)_1 - 2(n-2)\,\overline{o\mu}^{n-3}\,\Sigma(oa)_2 + 3(n-3)\,\overline{o\mu}^{n-4}\,\Sigma(oa)_3 - \ldots\ldots \Big\}$$
$$+ \Big\{ 1.2\,\overline{o\mu}^{n-3}\,\Sigma(oa)_2 - 2.3\,\overline{o\mu}^{n-3}\,\Sigma(oa)_3 + 3.4\,\overline{o\mu}^{n-4}\,\Sigma(oa)_4 - \ldots\ldots \Big\} = 0 \ldots\ldots (9)$$

Уравненіе это выражаетъ условіе того, что μ есть гармоническій центръ $(n-2)$-го порядка системы $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$ по отношенію къ полюсу π.

Если теперь назовемъ черезъ $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}$ гармоническіе центры $(n-1)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу π, то положеніе ихъ опредѣлится уравненіемъ (7), замѣняя въ послѣднемъ p черезъ π и m черезъ m'. Поэтому гармоническій центръ μ' порядка $(n-2)$-го системы $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}$ по отношенію къ полюсу p, опредѣлится уравненіемъ (9), замѣнивъ въ немъ μ черезъ μ' и переставивъ буквы p и π; и такъ какъ значенія, доставляемыя этимъ послѣднимъ уравненіемъ для $o\mu'$ тѣ-же самыя, какія доставляются для $o\mu$ уравненіемъ (9), то слѣдовательно гармоническіе центры μ и μ' совпадаютъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: **если $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ суть гармоническіе центры $(n-1)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, а $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}$ — гармоническіе центры $(n-1)$-го порядка той-же самой системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ но по отношенію къ полюсу**

π, то гармоническіе центры $(n-2)$-го порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ по отношенію къ полюсу π совпадаютъ съ гармоническими центрами того-же порядка системы $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}$ по отношенію къ полюсу p.

Зная это предложеніе, не трудно убѣдиться и въ справедливости слѣдующей общей теоремы:

Если $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ суть гармоническіе центры r-го порядка данной системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p; $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_s$ — гармоническіе центры s-го порядка той-же системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ но по отношенію къ полюсу π, то гармоническіе центры $(r+s-n)$-го порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ по отношенію къ полюсу π совпадаютъ съ гармоническими центрами того-же порядка системы $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_s$ по отношенію къ полюсу p.

Мы видѣли, что теорема эта имѣетъ мѣсто когда $r = n-1$ и $s = n-1$, докажемъ теперь справедливость этой теоремы для случая $r = n-2$ и $s = n-1$.

Назовемъ черезъ m гармоническій центръ $(n-1)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p; тогда $(n-1)$ положеній $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ точки m опредѣлятся уравненіемъ (7). Пусть теперь c будетъ гармоническій центръ $(n-2)$-го порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n-1}$ по отношенію къ полюсу p; тогда положеніе точки c опредѣлится слѣдующимъ уравненіемъ, которое получается изъ уравненія (9), замѣняя въ немъ μ черезъ c и полагая $o\pi = op$:

$$op^2 \left\{ n(n-1)\,\overline{oc}^{n-2} - (n-1)(n-2)\,\overline{oc}^{n-3}\,\Sigma(oa)_1 + \right.$$

$$\left. (n-2)(n-3)\,\overline{oc}^{n-4}\,\Sigma(oa)_2 - \ldots \right\}$$

$$-2\,op\Big\{(n-1)\,\overline{oc}^{n-2}\,\Sigma(oa)_1 - 2\,(n-2)\,\overline{oc}^{n-3}\,\Sigma(oa)_2 + 3\,(n-3)\,\overline{oc}^{n-4}\,\Sigma(oa)_3 - \ldots\Big\}$$

$$+\Big\{1\,.\,2\,\overline{oc}^{n-3}\,\Sigma(oa)_2 - 2\,.\,3\,\overline{oc}^{n-3}\,\Sigma(oa)_3 + 3\,.\,4\,\overline{oc}^{n-4}\,\Sigma(oa)_4 - \ldots\Big\} = 0$$

или

$$\overline{oc}^{n-2}\Big\{n\,(n-1)\,\overline{op}^2 - 2\,.\,1\,(n-1)\,op\,\Sigma(oa)_1 + 1\,.\,2\,\Sigma(oa)_2\Big\}$$

$$-\overline{oc}^{n-3}\Big\{(n-1)(n-2)\,\overline{op}^2\,\Sigma(oa)_1 - 2\,.\,2\,(n-2)\,op\,\Sigma(oa)_2 + 2\,.\,3\,\Sigma(oa)_3\Big\}$$

$$+\overline{oc}^{n-4}\Big\{(n-2)\,(n-3)\,\overline{op}^2\,\Sigma(oa)_2 - 2\,.\,3\,(n-3)\,op\,\Sigma(oa)_3 + 3\,.\,4\,\Sigma(oa)_4\Big\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{n-1}\Big\{2\,.\,1\,\overline{op}^2\,\Sigma(oa)_{n-2} - 2\,(n-1)\,.\,1\,.\,\Sigma(oa)_{n-1} + (n-1)\,n\,\Sigma(oa)_n\Big\} = 0 \ldots . \quad (10).$$

Такъ какъ c есть гармоническій центръ $(n-2)$-го порядка системы $m_1, m_2, m_3, \ldots m_{n+1}$ по отношенію къ полюсу p, то, на основаніи указанной выше зависимости между гармоническими центрами различныхъ порядковъ, заключаемъ, что c будетъ также гармоническимъ центромъ $(n-2)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p. Замѣтивъ это, назовемъ черезъ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-2}$ различныя положенія точки c, опредѣляемыя послѣднимъ

уравненіемъ, и черезъ ν гармоническій центръ $(n-3)$-го порядка системы $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-2}$ по отношенію къ полюсу π, тогда будемъ имѣть (см. ур. 7):

$$\overline{o\nu}^{n-3}\left\{(n-2)o\pi-1.\Sigma(oc)_1\right\}-\overline{o\nu}^{n-4}\left\{(n-3)o\pi\Sigma(oc)_1-2\Sigma(oc)_2\right\}$$
$$+\overline{o\nu}^{n-5}\left\{(n-4)o\pi\Sigma(oc)_2-3\Sigma(oc)_3\right\}-\ldots.=0\ldots. \quad (11)$$

Но изъ уравненія (10) имѣемъ:

$$\Sigma(oc)_k =$$
$$\frac{(n-k)(n-k-1)op^2\Sigma(oa)_k-2.(k+1)(n-k-1)op\Sigma(oa)_{k+1}+(k+1)(k+2)\Sigma(oa)_{k+2}}{n(n-1)\,\overline{op}^2-2.1\,(n-1)\,op\,\Sigma(oa)_1+1.2\,\Sigma(oa)_2}.$$

Поэтому, подставляя эту величину въ уравненіе (11) вмѣсто $\Sigma(oc)_k$, найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{op}^2\,o\pi\left\{n(n-1)(n-2)\,\overline{o\nu}^{n-3}-\right.\\
\qquad\left.(n-1)(n-2)(n-3)\,\overline{o\nu}^{n-4}\Sigma(oa)_1+\ldots.\right\}\\
-op\,o\pi\left\{2.1\,(n-1)(n-2)\,\overline{o\nu}^{n-3}\Sigma(oa)_1-\right.\\
\qquad\left.2.3\,(n-2)(n-3)\,\overline{o\nu}^{n-4}\Sigma(oa)_2+\ldots.\right\}\\
+o\pi\left\{1.2\,(n-2)\,\overline{o\nu}^{n-3}\Sigma(oa)_2-\right.\\
\qquad\left.2.3\,(n-3)\,\overline{o\nu}^{n-4}\Sigma(oa)_3+\ldots.\right\}\\
-\overline{op}^2\left\{(n-1)(n-2)\,\overline{o\nu}^{n-3}\Sigma(oa)_1-\right.\\
\qquad\left.(n-2)(n-3)\,\overline{o\nu}^{n-4}\Sigma(oa)_2+\ldots.\right\}
\end{array}\right\}\ldots(12)$$

$$+ op \left\{ 2.2\,(n-2)\,\overline{ov}^{n-3}\Sigma(oa)_2 + \right.$$
$$\left. 2.3\,(n-3)\,\overline{ov}^{n-4}\Sigma(oa)_3 + \ldots \right\} \Bigg\} \ldots (12)$$
$$- \left\{ 2.3\,\overline{ov}^{n-3}\Sigma(oa)_3 - 3.4\,\overline{ov}^{n-4}\Sigma(oa)_4 + \ldots \right\} = 0. \Bigg\}$$

Уравненіе это опредѣляетъ положеніе гармоническаго центра ν порядка $(n-3)$-го системы $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-2}$ по отношенію къ полюсу π.

Назовемъ теперь черезъ m' гармоническій центръ $(n-1)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу π; тогда будемъ имѣть (см. ур. 7)

$$\overline{om'}^{n-1}\left\{ n.o\pi - \Sigma(oa)_1 \right\} - \overline{om'}^{n-2}\left\{ (n-1)\,o\pi\,\Sigma(oa)_1 - 2\,\Sigma(oa)_2 \right\} +$$
$$\overline{om'}^{n-3}\left\{ (n-2)\,o\pi\,\Sigma(oa)_2 - 3\,\Sigma(oa)_3 \right\} - \ldots = 0 \ldots (13)$$

Пусть положенія m', опредѣляемыя этимъ уравненіемъ, будутъ $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}$ и обозначимъ черезъ ν' гармоническій центръ $(n-3)$-го порядка системы $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots, m'_{n-1}$ по отношенію къ полюсу p, тогда будемъ имѣть (см. ур. 10) слѣдующее уравненіе для опредѣленія ν':

$$\overline{ov'}^{n-3}\left\{ (n-1)\,(n-2)\,\overline{op}^2 - 2.1\,(n-2)\,op\,\Sigma(om')_1 + \right.$$
$$\left. 1.2\,\Sigma(om')_2 \right\}$$
$$- \overline{ov'}^{n-4}\left\{ (n-2)\,(n-3)\,\overline{op}^2\Sigma(om')_1 - 2.2\,(n-2)\,op\,\Sigma(om')_2 + \right.$$
$$\left. 2.3\,\Sigma(om')_3 \right\}$$

$$+ \overline{ov'}^{n-3} \Big\{ (n-3)(n-4)\,\overline{op}^2\,\Sigma(om')_2 - 2.3\,(n-3)\,op\,\Sigma(om')_3 + 3.4\,\Sigma(om')_4 \Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-3} \Big\{ 2.1\,\overline{op}^2\,\Sigma(om')_{n-3} - 2(n-2).1.\Sigma(om')_{n-2} + (n-1)\,n\,\Sigma(om')_{n-1} \Big\} = 0.$$

Если теперь въ этомъ уравненіи подставимъ вмѣсто $\Sigma(om')_k$ величину

$$\frac{(n-k)\,o\pi\,\Sigma(oa)_k - (k+1)\,\Sigma(oa)_{k+1}}{n.o\pi - \Sigma(oa)_1},$$

доставляемую уравненіемъ (13), то получимъ для опредѣленія v' уравненіе тождественное съ (12) и разнящееся отъ послѣдняго только тѣмъ что въ немъ ov будетъ замѣнено черезъ ov'. Поэтому гармоническіе центры v и v' совпадутъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что высказанная выше теорема справедлива для $r = n-2$ и $s = n-1$. Поступая подобнымъ же путемъ, мы докажемъ справедливость этой теоремы послѣдовательно для

$r = n-3$ и $s = n-1$; $r = n-4$ и $s = n-1$; ....

затѣмъ для какого угодно r и $s = n-2$, $s = n-3$, ...

и, вообще, для всякихъ значеній r и s.

До сихъ поръ мы предполагали, что точки a_1, a_2, a_3, ... a_n различны между собой. Допустимъ теперь, что r точекъ

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots\ a_{n-r+1}$$

совпадаютъ въ одну точку, которую назовемъ черезъ o. Тогда въ уравненіи (7)

$$\Sigma(oa)_n = 0,$$

$$\Sigma(oa)_{n-1} = 0,$$

.....

$$\Sigma(oa)_{n-r+1} = 0,$$

и оно будетъ имѣть общимъ множителемъ $\overline{om}^{r-1}$, поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ съ точкой o совпадаютъ $r-1$ гармоническихъ центровъ порядка $(n-1)$ системы $a_1, a_2, \ldots a_n$ и притомъ при какомъ угодно полюсѣ. Имѣя въ виду зависимость между гармоническими центрами различныхъ порядковъ, мы заключаемъ, что въ этомъ случаѣ съ точкой o совпадаютъ $r-2$ гармоническихъ центровъ порядка $n-2$; $r-3$ гармоническихъ центровъ порядка $n-3$; .... и наконецъ одинъ гармоническій центръ $(n-r+1)$-го порядка.

Итакъ, если въ данной системѣ n точекъ r изъ нихъ совпадаютъ въ одну точку o, то, при какомъ угодно полюсѣ, съ точкой o совпадутъ $r-1$ гармоническихъ центровъ $(n-1)$-го порядка данной системы; $r-2$ гармоническихъ центровъ $(n-2)$-го порядка; $r-3$ гармоническихъ центровъ $(n-3)$-го порядка ... и наконецъ одинъ гармоническій центръ порядка $n-r+1$.

Мы видѣли, что гармоническій центръ m порядка r системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p опредѣляется уравненіемъ (3'); помножая уравненіе (3') на $(-1)^r \overline{pm}^r . \overline{pa}_1 . \overline{pa}_2 \overline{pa}_3 \ldots \overline{pa}_n$, получимъ:

$$\overline{pm}^{r}\,\Sigma(pa)_{n-r} - (n-r+1)\,\overline{pm}^{r-1}\,\Sigma(pa)_{n-r+1} +$$

$$\frac{(n-r+1)(n-r)}{1.2}\,\overline{pm}^{r-2}\,\Sigma(pa)_{n-r+2} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{r}\frac{(n-r+1)(n-r)\ldots(n-2r-2)}{1.2.3\ldots.r}\Sigma(pa)_{n}=0\ldots(14)$$

Предположимъ теперь, что точки

$$a_n,\quad a_{n-1},\quad a_{n-2},\ldots.\,a_{n-s+1}$$

совпадаютъ съ полюсомъ p, тогда будемъ имѣть:

$$\Sigma(pa)_n = 0,$$

$$\Sigma(pa)_{n-1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma(pa)_{n-s+1} = 0$$

и слѣдовательно въ этомъ случаѣ уравненіе (14) будетъ дѣлиться на $\overline{pm}^{s}$, поэтому съ полюсомъ p совпадутъ s гармоническихъ центровъ какого угодно порядка r. Что касается остальныхъ $r-s$ гармоническихъ центровъ порядка r, то они опредѣлятся уравненіемъ

$$\overline{pm}^{r-s}\,\Sigma(pa)_{n-r} - (n-r+1)\,\overline{pm}^{r-s-1}\,\Sigma(pa)_{n-r+1} + \frac{(n-r+1)(n-r)}{1.2}\,\overline{pm}^{r-s-2}\,\Sigma(pa)_{n-r+2} - \ldots\ldots\ldots = 0,$$

гдѣ $\Sigma(pa)$ содержитъ только точки $a_1, a_2, a_3, \ldots. a_{n-s}$. Слѣдовательно $r-s$ точекъ, которыя вмѣстѣ съ s точками совпадающими съ полюсомъ p составляютъ гармони-

ческіе центры системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, будутъ гармоническими центрами $(r-s)$-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-s}$ по отношенію къ тому-же полюсу p.

Въ частномъ случаѣ когда $s = r + 1$, уравненіе (14) удовлетворяется тождественно и слѣдовательно за гармоническіе центры r-го порядка могутъ быть взяты какія угодно точки прямой $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$.

Итакъ, **если въ системѣ**

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots a_n$$

s **точекъ** $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_{n-s+1}$ **совпадаютъ съ полюсомъ** p, **то съ этой точкой совпадутъ** s **гармоническихъ центровъ произвольнаго порядка** r $(r \geq s)$ **системы** $a_1\, a_2\, a_3, \ldots a_n$, **а остальные** $r-s$ **изъ нихъ будутъ гармоническими центрами** $(r-s)$**-го порядка системы** $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-s}$ **по отношенію къ тому-же полюсу** p. **Кромѣ того въ этомъ случаѣ за гармоническій центръ** $(s-1)$**-го порядка системы** $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ **по отношенію къ полюсу** p, **можетъ быть взята какая угодно точка прямой** $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$.

---

§ 30. Предположимъ, что точки

$$p;\quad m_1, m_2, m_3, \ldots m_r;\quad a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

и

$$p';\quad m_1', m_2', m_3', \ldots m_r';\quad a_1', a_2', a_3', \ldots a_n'$$

будутъ соотвѣтственныя точки двухъ проэктивныхъ рядовъ L и L'. Тогда, принимая точки m_s, p и m_s', p' за по-

стоянныя, въ силу проэктивной зависимости, будемъ имѣть (см. гл. II ур. 8)

$$\frac{m_s' a_k'}{p' a'_k} = \pi \frac{m_s a_k}{p a_k},$$

гдѣ π постоянная величина.

Если теперь точки $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ будутъ гармоническіе центры r-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, то

$$\Sigma \left(\frac{ma}{pa}\right)_r = 0;$$

умножая это уравненіе на π и замѣняя $\pi \frac{ma}{pa}$ черезъ $\frac{m'a'}{p'a'}$, получимъ

$$\Sigma \left(\frac{m'a'}{p'a'}\right)_r = 0.$$

Равенство это показываетъ, что точки $m_1', m_2', m_3', \ldots m_r'$ суть гармоническіе центры системы $a_1', a_2', a_3', \ldots a_n'$ по отношенію къ полюсу p'.

Итакъ, если

$$p;\ m_1, m_2, m_3, \ldots m_r;\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

и

$$p';\ m_1', m_2', m_3', \ldots m_r';\ a_1', a_2', a_3', \ldots a_n'$$

будутъ соотвѣтственныя точки двухъ проэктивныхъ рядовъ L и L' и $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ гармоническіе центры r-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, то точки $m_1', m_2', m_3', \ldots m_r'$

будутъ гармоническими центрами r-го порядка системы $a_1', a_2', a_3', \ldots a_n'$ по отношенію къ полюсу p'.

Отсюда слѣдуетъ, что, если соединимъ точки

$$p;\ m_1, m_2, m_3, \ldots m_r;\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

прямой L (фиг. 40) съ произвольной точкой O плоскости прямыми

$$P;\ M_1, M_2, M_3, \ldots M_r;\ A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$

и назовемъ черезъ

$$p';\ m_1', m_2', m_3', \ldots m_r';\ a_1' a_2' a_3', \ldots a_n'$$

точки пересѣченія лучей пучка O съ произвольной трансверсалью L', то точки $m_1', m_2', m_3', \ldots m_r'$ будутъ гармоническими центрами r-го порядка системы $a_1', a_2', a_3', \ldots a_n'$ по отношенію къ полюсу p', если точки $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ суть гармоническіе центры r-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p.

Предположимъ теперь, что линіи L и L' пересѣкаются въ точкѣ p и будемъ разсматривать прямую L', какъ одно изъ положеній прямой L, вращающейся около точки p; тогда мы придемъ къ слѣдующему заключенію.

Если даны n лучей $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ пучка O, которыя пересѣкаются нѣкоторой прямой L, проходящей чрезъ постоянную точку p плоскости, въ точкахъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, то, при вращеніи прямой L около точки p; гармоническіе центры $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ порядка r системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p опишутъ r прямыхъ $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$, проходящихъ чрезъ точку O.

Лучи $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ называютъ **гармоническими осями** r-го порядка системы лучей $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ пучка по отношенію къ постоянному лучу P того-же пучка. Для построенія гармоническихъ осей r-го порядка системы лучей $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ пучка O по отношенію къ нѣкоторому постоянному лучу P того-же пучка, можно поступить слѣдующимъ образомъ. Назовемъ черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; p точки пересѣченія произвольной трансверсали L съ лучами $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$; P пучка O и, найдя гармоническіе центры $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ порядка r системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, соединимъ точки $m_1, m_2, m_3, \ldots m_r$ съ точкой O, полученныя прямыя и будутъ искомыя гармоническія оси. И такъ какъ точка m будетъ гармоническимъ центромъ r-го порядка системы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ по отношенію къ полюсу p, если выполняется условіе

$$\Sigma\left(\frac{ma}{pa}\right)_r = 0,$$

то слѣдовательно лучь M будетъ гармонической осью r-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ по отношенію къ лучу P, если

$$\Sigma\left(\frac{\sin(MA)}{\sin(PA)}\right)_r = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Ибо изъ проэктивной зависимости ряда L и пучка O слѣдуетъ, что

$$\frac{\sin(MA)}{\sin(PA)} = \pi\frac{ma}{pa}.$$

Изъ указанной выше проэктивной зависимости между гармоническими центрами и осями слѣдуетъ, что **если**

$$P;\quad M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots\ M_r;\quad A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$$

и

$$P';\quad M_1',\ M_2',\ M_3',\ \ldots\ M_r';\quad A_1',\ A_2',\ A_3',\ \ldots\ A_n';$$

будутъ соотвѣтственные лучи двухъ проэктивныхъ пучковъ O **и** O' **и** $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ **гармоническія оси** r**-го порядка системы** $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ **по отношенію къ лучу** P, **то лучи** $M_1', M_2', M_3', \ldots M_r'$ **будутъ гармоническими осями** r**-го порядка системы** $A_1', A_2', A_3', \ldots A_n'$ **по отношенію къ лучу** P'. Ибо лучи O и O' пересѣкаются произвольными трансверсалями въ проэктивныхъ рядахъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, **если даны** n **плоскостей** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ **пучка плоскостей** ω, **которыя пересѣкаются нѣкоторой плоскостью** λ, **проходящею черезъ постоянную прямую** P **(пересѣченія плоскости** λ **съ нѣкоторой плоскостью** π **пучка** ω**) въ лучахъ** $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, **то, при вращеніи плоскости** λ **около прямой** P, **гармоническія оси** $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ **порядка** r **системы** $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ **по отношенію къ лучу** P **опишутъ** r **плоскостей** $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_r$, **проходящихъ черезъ ось пучка** ω.

Плоскости $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_r$ можно назвать **гармоническими плоскостями** r-го порядка системы плоскостей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ пучка ω по отношенію къ постоянной плоскости π того-же пучка и легко видѣть, что для того чтобы плоскость μ была гармонической плоскостью r-го порядка системы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ по отношенію къ плоскости π, необходимо, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$\Sigma\left(\frac{\sin(\mu\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\right)_r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Что касается построенія гармонической плоскости, то оно приводится къ построенію гармонической оси или-же гармоническаго центра.

---

§ 31. Сказанное въ предыдущемъ § даетъ возможность найти свойства гармоническихъ осей и плоскостей, соотвѣтствующія свойствамъ гармоническихъ центровъ. Въ настоящемъ параграфѣ мы выскажемъ теоремы, относящіяся къ гармоническимъ осямъ; доказательство ихъ непосредственно вытекаетъ изъ проэктивной зависимости между гармоническими центрами и осями.

1) Если M есть гармоническая ось порядка r данной системы n лучей $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ по отношенію къ полюсу P, то обратно P есть гармоническая ось $(n-r)$-го порядка той-же системы но по отношенію къ лучу M.

2) Если $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ суть гармоническія оси r-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ по отношенію къ полюсу P, то гармоническія оси порядка s $(s<r)$ системы $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ по отношенію къ лучу P будутъ въ тоже время гармоническими осями s-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ по отношенію къ тому-же лучу P.

3) Если $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ суть гармоническія оси r-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ по отношенію къ лучу P; $M_1', M_2', M_3', \ldots M_s'$ — гармоническія оси s-го порядка той же системы но по отношенію къ лучу P', то гармоническія оси $(r+s-n)$ го порядка системы $M_1, M_2, M_3, \ldots M_r$ по отношенію къ лучу P, совпадаютъ съ гармоническими осями

того-же порядка системы M_1', M_2', M_3', ... M_s' по отношенію къ лучу P.

4) Если въ данной системѣ n лучей r изъ нихъ совпадаютъ въ одинъ лучь O, то при всякомъ положеніи луча P, съ лучемъ O совпадутъ $r-1$ гармоническихъ осей $(n-1)$-го порядка данной системы; $r-2$ гармоническихъ осей $(n-2)$-го порядка; .... и наконецъ одна гармоническая ось порядка $n-r+1$.

5) Если въ системѣ

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots . A_n$$

s лучей A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ... A_{n-s+1} совпадаютъ съ постояннымъ лучемъ P, то съ этимъ послѣднимъ совпадутъ s гармоническихъ осей произвольнаго порядка r $(r \geqq s)$ системы $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$, а остальные $r-s$ изъ нихъ будутъ гармоническими осями $(r-s)$-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_{n-s}$ по отношенію къ тому-же лучу P. Кромѣ того въ этомъ случаѣ за гармоническую ось $(s-1)$-го порядка системы $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$ по отношенію къ лучу P можетъ быть взятъ какой угодно лучь пучка A_1, A_2, A_3, ... A_n.

Легко видѣть, что для гармоническихъ плоскостей имѣютъ мѣсто предложенія аналогичныя предыдущимъ.

ГЛАВА IV.

Многозначные образы.

§ 22. Въ главѣ II мы разсмотрѣли свойства основныхъ геометрическихъ образовъ, находящихся въ такой зависимости, что каждому элементу одного изъ нихъ соотвѣтствуетъ одинъ элементъ другаго и назвали эти образы проэктивными. Очевидно, что между двумя какими-нибудь основными образами G_m и G_n можно установить такого рода алгебраическую зависимость, чтобы каждому элементу образа G_m соотвѣтствовало n элементовъ образа G_n и наоборотъ каждому элементу G_n соотвѣтствовало m элементовъ G_m. Если будемъ разсматривать каждый изъ образовъ G_m и G_n какъ нѣкоторую функцію, а его элементы какъ частныя значенія этой функціи; тогда каждый изъ образовъ G_m и G_n будетъ функція другаго и G_m будетъ m — значная функція G_n, ибо каждому значенію G_n отвѣтчаетъ m значеній G_m, а G_n будетъ n — значная функція G_m, ибо каждому значенію G_m отвѣчаетъ n значеній G_n. Поэтому мы можемъ сказать, что, въ разсматриваемомъ случаѣ, образы G_m и G_n находятся въ m—n—**значной зависимости** или же назвать эти образы m—n—**значными образами**. Согласно этому проэктивные образы должны быть названы **одно — одно — значными** (ein — ein — deutige Gebilde).

Предположимъ, что даны два m—n—значные образа G_m и G_n и назовемъ черезъ x и x' пару ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ, черезъ p и q пару постоянныхъ элементовъ G_m, черезъ r' и s' пару постоянныхъ элементовъ G_n и положимъ

$$\xi = \frac{\{px\}}{\{qx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{r'x'\}}{\{s'x'\}},$$

гдѣ $\{px\}$ имѣетъ тотъ-же смыслъ, что и въ § 10.

Такъ какъ въ силу m—n—значной зависимости каждому значенію ξ должно соотвѣтствовать n значеній ξ', и наоборотъ каждому значенію ξ' — m значеній ξ, то уравненіе между ξ и ξ' должно быть m-ой степени относительно ξ и n-ой — относительно ξ'. Самый общій видъ такой зависимости есть слѣдующій:

$$\xi'^n\left\{\mathbf{A}_0\xi^m+\mathbf{A}_1\xi^{m-1}+..+\mathbf{A}_m\right\}+\xi'^{n-1}\left\{\mathbf{B}_0\xi^m+\mathbf{B}_1\xi^{m-1}+..+\mathbf{B}_m\right\}+$$

$$\xi'^{n-2}\left\{\mathbf{C}_0\xi^m+\mathbf{C}_1\xi^{m-1}+....+\mathbf{C}_m\right\}+.....+$$

$$\left\{\mathbf{F}_0\xi^m+\mathbf{F}_1\xi^{m-1}+....+\mathbf{F}_m\right\}=0 \qquad (1)$$

Уравненіе это содержитъ $(n+1)(m+1)-1$ произвольныхъ постоянныхъ, именно отношенія $(n+1)(m+1)-1$ изъ $(n+1)(m+1)$ коефиціентовъ къ одному изъ нихъ и слѣдовательно **для опредѣленія m—n—значной зависимости двухъ образовъ нужно $(n+1)(m+1)-1$ условій**. Поэтому зависимость между образами G_m и G_n будетъ вполнѣ опредѣлена, если даны $(n+1)(m+1)-1$ паръ ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ; ибо, если дана пара соотвѣтственныхъ элементовъ, то даны и соотвѣтствующія имъ значенія ξ и ξ', которыя должны удовле-

творять уравненію (1), слѣдовательно каждой парѣ элементовъ отвѣчаетъ одно уравненіе первой степени между $(n+1)(m+1)-1$ произвольными постоянными уравненія (1); такимъ образомъ мы будемъ имѣть $(n+1)(m+1)-1$ уравненій, изъ которыхъ и можетъ быть опредѣлено такое же число постоянныхъ, входящихъ въ уравненіе (1). Отсюда видно, что между $(n+1)(m+1)$ парами соотвѣтственныхъ элементовъ должно существовать соотношеніе, независящее отъ относительнаго положенія образовъ G_m и G_n, ибо этимъ $(n+1)(m+1)$ парамъ элементовъ отвѣчаетъ такое-же число уравненій первой степени, изъ которыхъ можно исключить всѣ $(n+1)(m+1)-1$ произвольныхъ постоянныхъ уравненія (1). Результатъ исключенія, который можетъ быть представленъ въ формѣ опредѣлителя, и выразитъ зависимость, существующую между каждыми $(n+1)(m+1)$ парами соотвѣтственныхъ элементовъ образовъ G_m и G_n.

Предположимъ теперь, что оба образа G_m и G_n будутъ одного рода и наложены одинъ на другой т. е. G_m и G_n представлютъ два ряда точекъ на одной и той-же прямой или два пучка лучей съ общимъ центромъ, лежащихъ въ одной плоскости или наконецъ два пучка плоскостей съ общей осью. При этомъ можетъ случиться, что два какіе нибудь соотвѣтственные элемента совпадутъ въ одинъ, этотъ послѣдній мы будемъ называть **двойнымъ элементомъ m—n—значныхъ образовъ**. Принявъ въ образахъ G_m и G_n за постоянные элементы p и q, положимъ въ уравненіи (1)

$$\xi = \frac{\{px\}}{\{qx\}}, \qquad \xi' = \frac{\{px'\}}{\{qx'\}}.$$

Если теперь элементы x и x' совпадаютъ, то $\xi = \xi'$ и

слѣдовательно для розысканія двойныхъ элементовъ нужно въ уравненіи (1) положить $\xi = \xi'$; тогда это послѣднее будетъ $(n+m)$-ой степени относительно ξ и доставитъ $n+m$ значеній для ξ, которыя опредѣлятъ положенія $n+m$ двойныхъ элементовъ. Элементы эти могутъ быть всѣ или нѣкоторые дѣйствительные, мнимые или совпадающіе.

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ m—n—**значныхъ геометрическихъ образахъ, наложенныхъ одинъ на другой, существуетъ** $m+n$ **двойныхъ элементовъ.** Если-бы положеніе соотвѣтственныхъ элементовъ образовъ G_m и G_n опредѣлялось величинами

$$\mathbf{x} = [px], \qquad \mathbf{x}' = [r'x'],$$

гдѣ $[px]$ имѣетъ тоже значеніе, что и въ § 10, то условіе m—n—значной зависимости образовъ G_m и G_n представилось-бы въ формѣ:

$$\mathbf{x}'^{n}\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}^m+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{m-1}+..+\mathbf{A}_m\right\}+\mathbf{x}'^{n-1}\left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}^m+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{m-1}+..+\mathbf{B}_m\right\}+$$

$$\mathbf{x}'^{n-2}\left\{\mathbf{C}_0\mathbf{x}^m+\mathbf{C}_1\mathbf{x}^{m-1}+\ldots.+\mathbf{C}_m\right\}+\ldots\ldots\ldots+$$

$$\left\{\mathbf{F}_0\mathbf{x}_m+\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{m-1}+\ldots.+\mathbf{F}_m\right\}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Къ этому уравненію могутъ быть примѣнены всѣ тѣ разсужденія, которыя относились къ уравненію (1).

Изъ понятія объ m—n—значныхъ образахъ очевидно слѣдуетъ.

Если на одной прямой даны два ряда точекъ находящіеся въ m—n—значной зависимости, то, соединяя ихъ элементы съ произвольной точкой плоскости, мы получимъ два пучка лучей съ общимъ центромъ, которые будутъ находиться въ m—n—значной зависимости.

Если даны два пучка лучей съ общимъ центромъ или два пучка плоскостей съ общей осью, находящіеся въ m—n—значной зависимости, то, пересѣкая ихъ произвольной трансверсалью, мы получимъ на этой послѣдней m—n—значные ряды точекъ; пересѣкая-же пучки плоскостей произвольной плоскостью, мы получимъ два пучка лучей съ общимъ центромъ, находящіеся въ m—n значной зависимости.

И вообще, **если даны двѣ пары проэктивныхъ образовъ** G_m, G'_m **и** G_n, G'_n, **изъ которыхъ** G_m **и** G_n **находятся въ** m—n—**значной зависимости, то и образы** G'_m **и** G'_n **будутъ также находиться въ** m—n—**значной зависимости.**

---

§ 33. Разсмотримъ теперь нѣкоторые частные случаи m—n—значной зависимости.

Предположимъ, что даны одно—n—значные образы G_1 и G_n т. е. находящіеся въ такой зависимости, что каждому элементу образа G_1 соотвѣтствуетъ n элементовъ G_n, а каждому элементу G_n — одинъ элементъ образа G_1. Зависимость эта можетъ быть выражена каждымъ изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left\{\mathbf{A}_0\xi^n+\mathbf{A}_1\xi^{n-1}+..+\mathbf{A}_n\right\}+\xi'\left\{\mathbf{B}_0\xi^n+\mathbf{B}_1\xi^{n-1}+..+\mathbf{B}_n\right\}=0, \quad (3)$$

$$\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{n-1}+..+\mathbf{A}_n\right\}+\mathbf{x}'\left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{n-1}+..+\mathbf{B}_n\right\}=0, \quad (4)$$

Примѣняя къ этому случаю выводы предыдущаго §, мы видимъ: 1) что **для опредѣленія одно—**n**—значной зависимости нужно** $2n+1$ **условій**, напр. $2n+1$ паръ

соотвѣтственныхъ элементовъ; и слѣдовательно между **какими** $2n$ парами соотвѣтственныхъ элементовъ образовъ G_1 и G_n существуетъ соотношеніе, независящее отъ относительнаго положенія этихъ образовъ; 2) что **въ одно—n—значныхъ образахъ, наложенныхъ одинъ на другой существуетъ $n+1$ двойныхъ элементовъ.**

Замѣтивъ это, обратимся къ болѣе подробному разсмотрѣнію нѣкоторыхъ свойствъ одно—n—значныхъ образовъ.

Если два образа G_1 и G_n находятся въ одно—n—значной зависимости, то каждому элементу образа G_1 соотвѣтствуетъ группа n элементовъ образа G_n, въ этой группѣ всѣ или нѣкоторые элементы могутъ быть дѣйствительные, мнимые или наконецъ совпадающіе. Если два какіе-нибудь элемента этой группы совпадаютъ въ одинъ, то мы будемъ называть этотъ послѣдній **двойнымъ элементомъ образа** G_n. Посмотримъ теперь сколько можетъ быть въ образѣ G_1 такихъ элементовъ, которымъ бы въ G_n соотвѣтствовали группы о n элементахъ, содержащіе двойной элементъ. Обращаясь къ уравненію (3), мы видимъ, что вопросъ приводится къ тому, чтобы узнать сколько возможно такихъ значеній ξ', которыя бы доставляли для ξ два равныхъ корня. Но чтобы уравненіе содержало два равныхъ корня, какъ извѣстно, необходимо чтобы его дискриминантъ равнялся нулю. Такъ какъ уравненіе (3) n-ой степени относительно ξ, то дискриминантъ будетъ функція $2(n-1)$-ой степени его коефіціентовъ; приравнявъ дискриминантъ нулю, мы получимъ уравненіе $2(n-1)$-ой степени относительно ξ' и слѣдовательно для ξ' возможно $2(n-1)$ требуемыхъ значеній.

Отсюда заключаемъ, что, **если два образа находятся въ одно—n—значной зависимости, то въ одно-значномъ образѣ существуетъ $2(n-1)$ такихъ элементовъ, которымъ въ n—значномъ образѣ соотвѣтствуютъ**

2(n—1) группъ (с n элементахъ), содержащихъ по одному двойному элементу.

Предположимъ теперь, что одно—n—значные образы G_1 и G_n будутъ два ряда точекъ и выразимъ ихъ зависимость уравненіемъ:

$$\left\{ \mathbf{A}_0 \mathbf{x}^n + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{A}_n \right\} +$$

$$\mathbf{x}' \left\{ \mathbf{B}_0 \mathbf{x}^n + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{B}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_n \right\} = 0, \ldots\ldots (4)$$

гдѣ

$$\mathbf{x} = px, \qquad \mathbf{x}' = r' x',$$

p и r' пара постоянныхъ а x и x' пара соотвѣтственныхъ точекъ рядовъ G_1 и G_n.

Возьмемъ въ ряду G_1 какія нибудь четыре точки

$$a', \quad b', \quad c', \quad d',$$

и назовемъ черезъ

$$a_1, a_2, \ldots a_n; \quad b_1, b_2, \ldots b_n; \quad c_1, c_2, \ldots c_n; \quad d_1, d_2, \ldots d_n,$$

соотвѣтствующія имъ группы точекъ ряда G_n. Если обозначимъ черезъ

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4$$

гармоническіе центры перваго порядка системъ $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$; $c_1, c_2, \ldots c_n$; $d_1, d_2, \ldots d_n$ по отношенію къ полюсу p, то будемъ имѣть:

$$\frac{n}{p\mu_1} = \Sigma \left(\frac{1}{pa}\right)_1, \qquad \frac{n}{p\mu_2} = \Sigma \left(\frac{1}{pb}\right)_1$$

$$\frac{n}{p\mu_3} = \Sigma \left(\frac{1}{pc}\right)_1, \qquad \frac{n}{p\mu_4} = \Sigma \left(\frac{1}{pd}\right)_1$$

Представивъ уравненіе (4) въ формѣ

$$(\mathbf{A}_n+\mathbf{x}'\mathbf{B}_n)\frac{1}{\mathbf{x}^n}+(\mathbf{A}_{n-1}+\mathbf{x}'\mathbf{B}_{n-1})\frac{1}{\mathbf{x}^{n-1}}+\ldots+(\mathbf{A}_0+\mathbf{x}'\mathbf{B}_0)=0$$

и замѣчая, что $\mathbf{x}=px$ и $\mathbf{x}'=r'x'$, мы находимъ, что

$$\frac{n}{p\mu_1}=\Sigma\left(\frac{1}{pa}\right)_1=-\frac{\mathbf{A}_{n-1}+r'a'.\mathbf{B}_{n-1}}{\mathbf{A}_n+r'a'.\mathbf{B}_n},$$

откуда

$$p\mu_1=-n.\frac{\mathbf{A}_n+r'a'.\mathbf{B}_n}{\mathbf{A}_{n-1}+r'a'.\mathbf{B}_{n-1}}\ldots\ldots\ldots(5)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$p\mu_3=-n.\frac{\mathbf{A}_n+r'c'.\mathbf{B}_n}{\mathbf{A}_{n-1}+r'c'.\mathbf{B}_{n-1}}.$$

Вычитая изъ послѣдняго равенства уравненіе (5) и замѣчая, что

$$p\mu_3-p\mu_1=\mu_1\mu_3,\quad r'c'-r'a'=a'c'$$

получимъ:

$$\mu_1\mu_3=-n.\frac{(\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{B}_n-\mathbf{A}_n\mathbf{B}_{n-1})a'c'}{(\mathbf{A}_{n-1}+r'a'.\mathbf{B}_{n-1})(\mathbf{A}_{n-1}+r'c'.\mathbf{B}_{n-1})}.$$

Совершенно подобнымъ же путемъ найдемъ:

$$\mu_1\mu_4=-n.\frac{(\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{B}_n-\mathbf{A}_n\mathbf{B}_{n-1})a'd'}{(\mathbf{A}_{n-1}+r'a'.\mathbf{B}_{n-1})(\mathbf{A}_{n-1}+r'd'.\mathbf{B}_{n-1})}$$

$$\mu_2\mu_3=-n.\frac{(\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{B}_n-\mathbf{A}_n\mathbf{B}_{n-1})b'c'}{(\mathbf{A}_{n-1}+r'b'.\mathbf{B}_{n-1})(\mathbf{A}_{n-1}+r'c'.\mathbf{B}_{n-1})}$$

$$\mu_2\mu_4 = -n \cdot \frac{(\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{B}_n - \mathbf{A}_n\mathbf{B}_{n-1})\, b'd'}{(\mathbf{A}_{n-1} + r'b' \cdot \mathbf{B}_{n-1})(\mathbf{A}_{n-1} + r'd' \cdot \mathbf{B}_{n-1})}.$$

Послѣднія четыре равенства даютъ:

$$\frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1\mu_4} : \frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2\mu_4} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}$$

или

$$(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) = (a'b'c'd')$$

т. е. ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ a', b', c', d' равно ангармоническому отношенію четырехъ гармоническихъ центровъ перваго порядка μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 системъ $a_1, a_2, \ldots . a_n$, $b_1, b_2, \ldots . b_n$; $c_1, c_2, \ldots . c_n$; $d_1, d_2, \ldots . d_n$ по отношенію къ какому-угодно полюсу p.

Ангармоническое отношеніе $(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ мы будемъ называть **ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ группъ точекъ n—значнаго образа G_n.**

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если два ряда точекъ G_1 и G_n находятся въ одно—n—значной зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда G_1 равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ имъ группъ точекъ ряда G_n.

Изъ предыдущаго предложенія слѣдуетъ, что, **если пучекъ лучей G_1 и рядъ точекъ G_n находятся въ одно—n—значной зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ лучей пучка G_1 равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ имъ группъ точекъ ряда G_n.**

Ибо пересѣкая пучекъ G_1 произвольной трансверсалью, мы получимъ рядъ точекъ, который будетъ находиться съ рядомъ G_n въ одно—n—значной зависимости.

Называя **ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ группъ лучей n—значнаго пучка лучей** ангармоническое отношеніе гармоническихъ осей перваго порядка этихъ группъ по отношенію къ какому нибудь лучу того-же пучка, мы можемъ сказать что, **если рядъ точекъ G_1 и пучекъ лучей G_n находятся въ одно—n—значной зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ ряда G_1 равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ имъ группъ лучей пучка G_n.**

Ибо, пересѣкая пучекъ G_n произвольной трансверсалью, мы получимъ рядъ точекъ, который будетъ находиться съ рядомъ G_1 въ одно—n—значной зависимости.

Изъ предыдущихъ предложеній также слѣдуетъ, что, **если два пучка лучей G_1 и G_n находятся въ одно—n—значной зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ лучей пучка G_1 равно ангармоническому отношенію соотвѣтствующихъ имъ четырехъ группъ лучей пучка G_n.**

Ибо, пересѣкая пучекъ G_1 произвольной трансверсалью, мы получимъ рядъ точекъ, который будетъ находиться съ пучкомъ G_n въ одно—n—значной зависимости.

Высказанныя предложенія легко могутъ быть примѣнены и къ пучкамъ плоскостей.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему общему предложенію.

Если два образа G_1 и G_n находятся въ одно—n—значной зависимости то ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ образа G_1 равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ группъ элементовъ образа G_n.

Разсмотримъ теперь случай одно — дву — значныхъ образовъ (Ein — zweideutige Gebilde) *). Пусть данные образы G_1 и G_2 находятся въ одно—дву—значной зависимости, тогда эта зависимость можетъ быть выражена уравненіемъ:

$$\left|\mathbf{A}_0\xi^2+\mathbf{A}_1\xi+\mathbf{A}_2\right|+\xi'\left|\mathbf{B}_0\xi^2+\mathbf{B}_1\xi+\mathbf{B}_2\right|=0 \ldots. (6)$$

или-же уравненіемъ:

$$\left|\mathbf{A}_0\mathbf{x}^2+\mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{A}_2\right|+\mathbf{x}'\left|\mathbf{B}_0\mathbf{x}^2+\mathbf{B}_1\mathbf{x}+\mathbf{B}_2\right|=0 \ldots. (7)$$

Примѣняя къ этому случаю выше-найденные результаты, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

Для опредѣленія одно—дву—значной зависимости двухъ-геометрическихъ образовъ нужно пять условій, напр. пять паръ соотвѣтственныхъ элементовъ.

Въ двухъ образахъ, находящихся въ одно—дву—значной зависимости, существуютъ два такіе элемента въ однозначномъ образѣ, которымъ соотвѣтствуютъ двойные элементы двузначнаго образа.

Въ двухъ образахъ G_1 и G_2, находящихся въ одно—дву—значной зависимости, ангармоническое отношеніе четырехъ элементовъ образа G_1 равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ имъ паръ элементовъ образа G_2.

---

*) *Weyr* — Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse Leipzig. 1869.

Въ одно-дву-значныхъ образахъ наложенныхъ одинъ на другой существуетъ три двойныхъ элемента.

Если даны двѣ пары проэктивныхъ образовъ G_1, G_1', и G_2, G_2', изъ которыхъ G_1 и G_2 находятся въ одно—дву—значной зависимости, то и образы G_1', G_2' будутъ также находиться въ одно—дву—значной зависимости.

Легко убѣдиться, что, если два образа G_1, и G_2 находятся въ одно—дву—значной зависимости, то пары элементовъ образа G_2, соотвѣтствующіе элементамъ G_1, находятся въ инволюціи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ уравненіи (6)

$$\xi' = \frac{\{r' x'\}}{\{s' x'\}},$$

гдѣ r' и s' пара постоянныхъ элементовъ образа G_1 и предположимъ, что элементъ x' совпадаетъ съ r', тогда соотвѣтствующая ему пара элементовъ r_1 и r_2 образа G_2 найдется, полагая въ уравненіи (6) $\xi = 0$ и слѣдовательно пара элементовъ r_1 и r_2 опредѣлится уравненіемъ:

$$\mathbf{A}_0\xi^2 + \mathbf{A}_1\xi + \mathbf{A}_2 = 0.$$

Допустимъ теперь, что элементъ x' совпадаетъ съ s', тогда соотвѣтствующая ему пара элементовъ s_1 и s_2 образа G_2 найдется, полагая въ уравненіи (6) $\frac{1}{\xi} = 0$ т. е. элементы s_1 и s_2 опредѣлятся уравненіемъ:

$$\mathbf{B}_0\xi^2 + \mathbf{B}_1\xi + \mathbf{B}_2 = 0.$$

Замѣтивъ это, будемъ разсматривать въ уравненіи (6) ξ', какъ перемѣнный параметръ, тогда это уравненіе опре-

дѣлитъ пары элементовъ, которые съ элементами r_1, r_2 и s_1, s_2 находятся въ инволюціи (см. § 22 ур. 37).

Такимъ образомъ мы видимъ, что, **если даны, два образа, находящіеся въ одно—дву—значной зависимости, то пары элементовъ двузначнаго образа, соотвѣтствующіе элементамъ однозначнаго образа, составляютъ инволюцію, двойныя элементы которой будутъ двойными элементами двузначнаго образа.**

Припоминая свойства двойныхъ элементовъ инволюціи, мы заключаемъ, что **каждая пара элементовъ двузначнаго образа, соотвѣтствующая какому нибудь элементу однозначнаго образа, раздѣляется гармонически двойными элементами.**

---

§ 34. Въ § 32 мы видѣли, что, если два образа G_m и G_n находятся въ $m-n$--значной зависимости, то между величинами, опредѣляющими положеніе ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ имѣютъ мѣсто уравненія вида:

$$\xi'^m\left\{\mathbf{A}_0\xi^n+\mathbf{A}_1\xi^{n-1}+\ldots+\mathbf{A}_n\right\}+\xi'^{m-1}\left\{\mathbf{B}_0\xi^n+\mathbf{B}_1\xi^{n-1}+\ldots+\mathbf{B}_n\right\}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\xi'\left\{\mathbf{E}_0\xi^n+\mathbf{E}_1\xi^{n-1}+\ldots.+\mathbf{E}_n\right\}+$$
$$\left\{\mathbf{F}_0\xi^n+\mathbf{F}_1\xi^{n-1}+\ldots.+\mathbf{F}_n\right\}=0\ldots\ldots(8)$$

$$\mathbf{x}'^m\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+\mathbf{A}_n\right\}+\mathbf{x}'^{m-1}\left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{B}_1\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+\mathbf{B}_n\right\}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\mathbf{x}'\left\{\mathbf{E}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{E}_1\mathbf{x}^{n-1}+\ldots.+\mathbf{E}_n\right\}+$$
$$\left\{\mathbf{F}_0\mathbf{x}^n+\mathbf{F}_1\mathbf{x}^{n-1}+\ldots.+\mathbf{F}_n\right\}=0\ldots\ldots(9)$$

и каждому элементу одного образа G_n соотвѣтствуетъ m элементовъ G_m и наоборотъ каждому элементу образа G_m соотвѣтствуетъ n элементовъ G_n.

Пусть элементу x_1 образа G_n соотвѣтствуютъ элементы $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots . x'_m$ образа G_m а элементу x'_1 соотвѣтствуютъ кромѣ x_1 еще элементы $x_2, x_3, \ldots . x_n$; тогда элементу x_2 образа G_n будутъ соотвѣтствовать въ G_m кромѣ x'_2 еще $m-1$ элементовъ, которые вообще будутъ отличны отъ $x'_1, x'_3, \ldots . x'_m$.

Предположимъ теперь, что коефиціенты уравненій (8, 9) выбраны такимъ образомъ, что, если какому нибудь изъ элементовъ $x_1, x_2, \ldots . x_n$ соотвѣтствуетъ группа элементовъ $x'_1, x'_2, \ldots . x'_m$, то и каждому изъ элементовъ $x_1, x_2, \ldots . x_n$ соотвѣтствуетъ таже группа $x'_1, x'_2, \ldots . x'_m$ и наоборотъ каждому изъ элементовъ $x'_1, x'_2, \ldots . x'_m$ соотвѣтствуетъ одна и таже группа $x_1, x_2, \ldots . x_n$. Тогда слѣдовательно образы G_m и G_n находятся въ такой зависимости, что каждой группѣ о n элементахъ образа G_n соотвѣтствуетъ группа о m элементахъ образа G_m и обратно этой послѣдней группѣ соотвѣтствуетъ первая. Поэтому мы можемъ сказать, что въ этомъ случаѣ образы G_m и G_n находятся въ $m-n$**—значной групповой зависимости**.

Чтобы найти такое условіе между коефиціентами уравненія (9), при которомъ это послѣднее выражало-бы $m-n$—значную групповую зависимость образовъ G_m и G_n, замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ должны существовать такіе различные элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$, которымъ бы соотвѣтствовала одна и таже группа элементовъ $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots . x'_m$. Называя черезъ $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \ldots . \mathbf{X}_n$ значенія $\mathbf{X}$, отвѣчающія элементамъ $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$, мы видимъ, что $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \ldots . \mathbf{X}_n$ должны удовлетворять условію:

$$\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}_i^n+..+\mathbf{A}_n\right\} : \left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}_i^n+..+\mathbf{B}_n\right\} : \ldots : \left\{\mathbf{F}_0\mathbf{x}_i^n+..+\mathbf{F}_n\right\} =$$

$$\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}_k^n+..+\mathbf{A}_n\right\} : \left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}_k^n+..+\mathbf{B}_n\right\} : \ldots : \left\{\mathbf{F}_0\mathbf{x}_k^n+..+\mathbf{F}_n\right\}, \ldots (10)$$

гдѣ i и k различныя числа изъ ряда 1, 2, 3, ... n.

Называя черезъ λ произвольное число, послѣднее условіе можетъ быть замѣнено системой уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{A}_0\left\{\mathbf{x}_i^n-\lambda\mathbf{x}_k^n\right\}+\mathbf{A}_1\left\{\mathbf{x}_i^{n-1}-\lambda\mathbf{x}_k^{n-1}\right\}+..+\mathbf{A}_n\left\{1-\lambda\right\}=0,\\
\mathbf{B}_0\left\{\mathbf{x}_i^n-\lambda\mathbf{x}_k^n\right\}+\mathbf{B}_1\left\{\mathbf{x}_i^{n-1}-\lambda\mathbf{x}_k^{n-1}\right\}+..+\mathbf{B}_n\left\{1-\lambda\right\}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{F}_0\left\{\mathbf{x}_i^n-\lambda\mathbf{x}_k^n\right\}+\mathbf{F}_1\left\{\mathbf{x}_i^{n-1}-\lambda\mathbf{x}_k^{n-1}\right\}+..+\mathbf{F}_n\left\{1-\lambda\right\}=0,
\end{array}\right\} \quad (11)$$

и, чтобы между этими уравненіями возможно было исключить величины $(x_i^n-\lambda x_k^n)$, $(x_i^{n-1}-\lambda x_k^{n-1})$, ... $(1-\lambda)$, необходимо, чтобы имѣло мѣсто условіе:

$$\left\|\begin{array}{llll}
\mathbf{A}_0, & \mathbf{A}_1, & \ldots. & \mathbf{A}_n\\
\mathbf{B}_0, & \mathbf{B}_1, & \ldots. & \mathbf{B}_n\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
\mathbf{F}_0, & \mathbf{F}_1, & \ldots. & \mathbf{F}_n
\end{array}\right\| = 0 \ldots\ldots (12)$$

Этимъ равенствомъ мы выражаемъ, что при $m>n$ должны обращаться въ нуль всѣ

$$\frac{(m+1).m.(m-1)\ldots.(m-n)}{1.2.3\ldots.(n+1)}$$

опредѣлителей $(n+1)$-го порядка, которыхъ системы получаются изъ системы

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{F}_1, \ldots \mathbf{F}_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (12')$$

чрезъ выпущеніе въ послѣдней $m-n$ горизонталей.

Если $m < n$, то равенство (12) выражаетъ, что должны обращаться въ нуль всѣ

$$\frac{(n+1).n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots(m+1)}$$

опредѣлителей $(m+1)$-го порядка, которыхъ системы получаются изъ системы (12′) чрезъ выпущеніе въ послѣдней $n-m$ вертикалей.

Наконецъ когда $m = n$, то первая часть уравненія (12) обращается въ опредѣлитель порядка $m+1 = n+1$ и условіе (12) приводится къ виду

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{F}_1, \ldots \mathbf{F}_n \end{array}\right| = 0 \ldots\ldots (13)$$

Итакъ, если уравненіе (9) представляетъ условіе того, что два образа находятся въ $m-n$—значной групповой

зависимости, то между его коефиціентами должны имѣть мѣсто равенства (12).

Тоже самое относится и къ уравненію (8).

Очевидно, что имѣетъ мѣсто и обратное предложеніе т. е., если коефиціенты уравненія (8 или 9) удовлетворяютъ равенствамъ (12), то уравненіе (8, 9) представляетъ условіе m—n—значной групповой зависимости.

Предположимъ, что m—n—значная групповая зависимость двухъ рядовъ точекъ G_m и G_n выражается уравненіемъ (9), гдѣ

$$\mathbf{x} = px\,, \qquad \mathbf{x}' = q'x'$$

x и x' пара соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ образовъ а p и q' пара ихъ постоянныхъ элементовъ.

Назовемъ черезъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n;\ y_1, y_2, \ldots y_n;\ z_1, z_2, \ldots z_n;\ u_1, u_2, \ldots u_n \ldots . \quad (14)$$

и

$$x_1', x_2', \ldots x_n';\ y_1', y_2', \ldots y_n';\ z_1', z_2', \ldots z_n';\ u_1', u_2', \ldots u_n' \ldots \quad (15)$$

соотвѣтственныя группы элементовъ образовъ G_n и G_m и черезъ

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$$

гармоническіе центры 1-го порядка группъ (14) по отношенію къ полюсу p, а черезъ

$$\mu'_1,\ \mu'_2,\ \mu'_3,\ \mu'_4$$

гармоническіе центры 1-го порядка группъ (15) по отношенію къ полюсу q'; тогда

$$\frac{n}{p\mu_1} = \Sigma\left(\frac{1}{px}\right)_1, \quad \frac{n}{p\mu_2} = \Sigma\left(\frac{1}{py}\right)_1,$$

$$\frac{n}{p\mu_3} = \Sigma\left(\frac{1}{pz}\right)_1, \quad \frac{n}{p\mu_4} = \Sigma\left(\frac{1}{pu}\right)_1;$$

$$\frac{m}{q'\mu'_1} = \Sigma\left(\frac{1}{q'x'}\right)_1, \quad \frac{m}{q'\mu'_2} = \Sigma\left(\frac{1}{q'y'}\right)_1,$$

$$\frac{m}{q'\mu'_3} = \Sigma\left(\frac{1}{q'z'}\right)_1, \quad \frac{m}{q'\mu'_4} = \Sigma\left(\frac{1}{q'u'}\right)_1.$$

Изъ уравненія же (9) имѣемъ:

$$\Sigma\left(\frac{1}{q'x'}\right)_1 = -\frac{\mathbf{E}_0\overline{px_1}^n + \mathbf{E}_1\overline{px_1}^{n-1} + \ldots + \mathbf{E}_n}{\mathbf{F}_0\overline{px_1}^n + \mathbf{F}_1\overline{px_1}^{n-1} + \ldots + \mathbf{F}_n};$$

и такъ какъ, въ силу условій (10), вторая часть послѣдняго равенства неизмѣняется, если въ ней замѣнимъ px_1 черезъ px_2, px_3, $\ldots$ px_n, то слѣдовательно равенство

$$\Sigma\left(\frac{1}{q'x'}\right)_1 = -\frac{\mathbf{E}_0\overline{px}^n + \mathbf{E}_1\overline{px}^{n-1} + \ldots + \mathbf{E}_n}{\mathbf{F}_0\overline{px}^n + \mathbf{F}_1\overline{px}^{n-1} + \ldots + \mathbf{F}_n} \ldots (16)$$

будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній px изъ ряда

$$px_1, \quad px_2, \ldots px_n.$$

Поэтому, замѣняя въ уравненіи (16) $\Sigma\left(\frac{1}{q'x'}\right)_1$ черезъ $\frac{m}{q'\mu'_1}$ и написавъ его въ формѣ:

$$(m\mathbf{F}_0 + \mathbf{E}_0 q'\mu'_1)\overline{px}^n + (m\mathbf{F}_1 + \mathbf{E}_1 . q'\mu'_1)\overline{px}^{n-1} + \ldots +$$

$$(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1} q'\mu'_1)\overline{px} + (m\mathbf{F}_n + \mathbf{E}_n q'\mu'_1) = 0, \ldots (17)$$

будемъ имѣть:

$$\sum\left(\frac{1}{px}\right)_1 = -\frac{m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}\, q'\mu'_1}{m\mathbf{F}_n + \mathbf{E}_n\, q'\mu'_1}$$

Откуда, замѣняя $\sum\left(\frac{1}{px}\right)_1$ черезъ $\frac{n}{p\mu_1}$, получимъ:

$$p\mu_1 = -n\,\frac{m\mathbf{F}_n + \mathbf{E}_n\, q'\mu'_1}{m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}\, q'\mu'_1}$$

Подобнымъ-же путемъ найдемъ:

$$p\mu_3 = -n\,\frac{m\mathbf{F}_n + \mathbf{E}_n\, q'\mu'_3}{m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}\, q'\mu'_3}$$

Вычитая изъ этого равенства предыдущее и замѣчая, что $p\mu_3 - p\mu_1 = \mu_1\mu_3$, $q'\mu'_3 - q'\mu'_1 = \mu'_1\mu'_3$, получимъ:

$$\mu_1\mu_3 = -nm\,\mu'_1\mu'_3\,\frac{\mathbf{E}_n\mathbf{F}_{n-1} - \mathbf{E}_{n-1}\mathbf{F}_n}{(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_1)(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_3)}$$

Точно также найдемъ:

$$\mu_1\mu_4 = -nm\,\mu'_1\mu'_4\,\frac{\mathbf{E}_n\mathbf{F}_{n-1} - \mathbf{E}_{n-1}\mathbf{F}_n}{(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_1)(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_4)},$$

$$\mu_2\mu_3 = -nm\,\mu'_2\mu'_3\,\frac{\mathbf{E}_n\mathbf{F}_{n-1} - \mathbf{E}_{n-1}\mathbf{F}_n}{(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_2)(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_3)},$$

$$\mu_2\mu_4 = -nm\,\mu'_2\mu'_4\,\frac{\mathbf{E}_n\mathbf{F}_{n-1} - \mathbf{E}_{n-1}\mathbf{F}_n}{(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_2)(m\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{E}_{n-1}q'\mu'_4)}.$$

Послѣднія четыре равенства даютъ:

$$\frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1\mu_4} : \frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2\mu_4} = \frac{\mu'_1\mu'_3}{\mu'_1\mu'_4} : \frac{\mu'_2\mu'_3}{\mu'_2\mu'_4}$$

или

$$(\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4) = (\mu'_1\,\mu'_2\,\mu'_3\,\mu'_4)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что, **если два ряда точекъ находятся въ m—n—значной групповой зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ группъ точекъ одного ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ группъ другаго ряда.**

Написавъ уравненіе (17) въ формѣ

$$m\,(\mathbf{F}_0\,\overline{px}^n + \mathbf{F}_1\,\overline{px}^{n-1} + \ldots + \mathbf{F}_n) + q'\mu'_1(\mathbf{E}_0\,\overline{px}^n + \mathbf{E}_1\,\overline{px}^{n-1} + \ldots + \mathbf{E}_n) = 0 \quad \ldots\ldots (18)$$

мы видимъ, что рядъ точекъ

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3, \ldots$$

находится въ одно—n—значной зависимости съ рядомъ G_n.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что и рядъ

$$\mu'_1,\ \mu'_2,\ \mu'_3, \ldots$$

находится въ одно—n—значной зависимости съ рядомъ G_m.

Итакъ мы видимъ, что, если два ряда точекъ G_n и G_m находятся въ m—n—значной групповой зависимости и

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3, \ldots$$

$$\mu_1',\ \mu_1',\ \mu_3', \ldots$$

суть гармоническіе центры перваго порядка соотвѣтственныхъ группъ этихъ образовъ, то рядъ $\mu_1, \mu_2, \ldots$. находится въ одно—n—значной зависимости съ рядомъ G_n, а рядъ $\mu'_1, \mu'_2, \ldots$.— въ одно—m—значной зависимости съ рядомъ G_m.

Такъ какъ ряды

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \ldots.$$

$$\mu_1', \quad \mu_2', \quad \mu_3', \ldots.$$

проэктивны, то всегда можно найти такой образъ H_1, который бы былъ проэктивенъ съ рядами $\mu_1, \mu_2, \ldots.$; $\mu_1', \mu_2', \ldots.$

Назовемъ черезъ r постоянный элементъ образа H_1 и черезъ ν_1 элементъ соотвѣтствующій элементамъ μ_1 и μ'_1 и пусть условіе проэктивной зависимости рядовъ H_1 и $\mu_1', \mu_2', \ldots.$ будетъ:

$$a \,.\, q'\mu_1' \,.\, r\nu_1 + b \,.\, q'\mu_1' + c \,.\, r\nu_1 + d = 0.$$

Исключая $q'\mu_1'$ между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ (18), получимъ:

$$\Big\{(m\,b\,\mathbf{F}_0 - d \,.\, \mathbf{E}_0)\,\overline{px}^n + \ldots. + (m\,b \,.\, \mathbf{F}_n - d\mathbf{E}_n)\Big\} +$$

$$r\nu_1 \Big\{ (ma\,\mathbf{F}_0 - c\mathbf{E}_0)\,\overline{px}^n + \ldots. + (ma\,\mathbf{F}_n - c\mathbf{E}_n) \Big\} = 0$$

Уравненіе это показываетъ, что образы H_1 и G_n находятся въ одно — n — значной зависимости.

Подобнымъ же путемъ можно убѣдиться, что образы H_1 и G_m находятся въ одно — m — значной зависимости.

Поэтому заключаемъ, что, **если два ряда точекъ G_m и G_n находятся въ $m-n$-значной групповой зависимости, то всегда можно найти такой образъ H_1, который бы съ рядомъ G_n находился въ одно-n-значной зависимости а съ рядомъ G_m въ одно-m-значной зависимости.**

Пользуясь проэктивными свойствами основныхъ геометрическихъ образовъ и гармоническихъ центровъ, осей и плоскостей, мы приходимъ къ слѣдующимъ общимъ предложеніямъ.

Если два образа находятся въ $m-n$-значной групповой зависимости, то ангармоническое отношеніе четырехъ группъ элементовъ одного образа равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ группъ элементовъ другаго образа *).

Если два образа G_m и G_n находятся въ $m-n$-значной групповой зависимости, то всегда можно найти такой образъ H_1, который-бы находился съ G_m въ одно-m-значной зависимости, а съ G_n въ одно-n-значной.

Кромѣ того изъ сказаннаго въ § 32 заключаемъ, что, **если два образа G_m и G_k одного рода, находящіеся въ $m-n$-значной групповой зависимости, наложены одинъ на другой, то при этомъ совпадутъ $m+n$ ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ** т. е. въ этомъ случаѣ будутъ существовать $m+n$ двойныхъ элементовъ.

Применимъ теперь эти выводы къ слѣдующему частному случаю $m-n$-значной групповой зависимости. Предположимъ, что два образа G_2 и H_2 находятся въ такой

(*) Это предложеніе содержитъ въ себѣ, какъ частный случай, соотвѣтствующую теорему для одно-n-значной зависимости.

зависимости, что каждой парѣ элементовъ одного образа соотвѣтствуетъ пара элементовъ другаго. Въ этомъ случаѣ можно сказать, что образы G_2 и H_2 находятся въ **попарной зависимости** (paarverwandte Gebilde) *).

Пусть зависимость образовъ G_2 и H_2 выражается уравненіемъ

$$x'^2\left\{A_0x^2+A_1x+A_2\right\}+x'\left\{B_0x^2+B_1x+B_2\right\}+\left\{C_0x^2+C_1x+C_2\right\}=0.$$

Такъ какъ образы эти находятся въ попарной зависимости, то слѣдовательно коефиціенты послѣдняго уравненія должны удовлетворять условію:

$$\begin{vmatrix} A_0, & A_1, & A_2 \\ B_0, & B_1, & B_2 \\ C_0, & C_1, & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Примѣняя къ этому случаю предложенія настоящаго §, мы видимъ: 1) что **въ двухъ образахъ G_2 и H_2, находящихся въ попарной зависимости, ангармоническое отношеніе четырехъ паръ элементовъ одного образа равно ангармоническому отношенію соотвѣтственныхъ четырехъ паръ элементовъ другаго образа**; 2) что **всегда можно найти такой образъ H_1, который-бы находился въ одно-двузначной зависимости съ каждымъ изъ образовъ G_2 и H_2**; 3) что **если образы G_2**

*) *Heger* Bemerkungen über zwei-zweideutige Verwandschaft. Vid Zeitschrift für Mathematik und Physik 1872. I Heft, s. 71.

и H_2 одного рода и наложены одинъ на другой, то при этомъ существуютъ четыре двойныхъ элемента.

Легко убѣдиться, что элементы каждаго изъ образовъ G_2 и H_2 находятся въ инволюціи.

Въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ уравненія (11) обращаются въ слѣдующія:

$$\mathbf{A}_0\left\{\mathbf{x}^2_1-\lambda\mathbf{x}^2_2\right\}+\mathbf{A}_1\left\{\mathbf{x}_1-\lambda\mathbf{x}_2\right\}+\mathbf{A}_2\left\{1-\lambda\right\}=0,$$

$$\mathbf{B}_0\left\{\mathbf{x}^2_1-\lambda\mathbf{x}^2_2\right\}+\mathbf{B}_1\left\{\mathbf{x}_1-\lambda\mathbf{x}_2\right\}+\mathbf{B}_2\left\{1-\lambda\right\}=0,$$

$$\mathbf{C}_0\left\{\mathbf{x}^2_1-\lambda\mathbf{x}^2_2\right\}+\mathbf{C}_1\left\{\mathbf{x}_1-\lambda\mathbf{x}_2\right\}+\mathbf{C}_2\left\{1-\lambda\right\}=0$$

и такъ какъ между ихъ коефиціентами имѣетъ мѣсто равенство (19), то слѣдовательно, опредѣляя изъ нихъ

$$\frac{\mathbf{x}^2_1-\lambda\mathbf{x}^2_2}{1-\lambda},\qquad \frac{\mathbf{x}_1-\lambda\mathbf{x}_2}{1-\lambda},$$

мы найдемъ для этихъ величинъ по одному значенію; назовемъ эти значенія черезъ b и a, такъ что

$$\frac{\mathbf{x}^2_1-\lambda\mathbf{x}^2_2}{1-\lambda}=b,\qquad \frac{\mathbf{x}_1-\lambda\mathbf{x}_2}{1-\lambda}=a.$$

Исключая между послѣдними уравненіями λ, мы получимъ равенство

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2+a(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=0,$$

которое показываетъ, что пары элементовъ образа G_2 находятся въ инволюціи. — (См. § 20, ур. 28).

Такимъ образомъ мы видимъ, что, если два образа

G_2 и H_2 находятся въ по-парной зависимости, то элементы каждаго изъ нихъ составляютъ инволюцію, въ которой соотвѣтственными элементами будутъ элементы одной и той-же пары.

Инволюція n-го порядка.

§ 35. Предположимъ, что

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^n + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{A}_n = 0 \ldots\ldots (20)$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{x}^n + \mathbf{B}_1\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{B}_n = 0 \ldots\ldots (21)$$

будутъ два алгебрическія уравненія n-ой степени, гдѣ $\mathbf{x}$ величина, опредѣляющая разстояніе какой нибудь точки x данной прямой L отъ нѣкоторой постоянной точки p той-же прямой, тогда эти уравненія опредѣлятъ положеніе двухъ группъ о n точкахъ, лежащихъ на прямой L.

Если назовемъ чрезъ λ произвольную величину, то уравненіе

$$\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{x}^n + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{A}_n\right\} + \lambda\left\{\mathbf{B}_0\mathbf{x}^n + \mathbf{B}_1\mathbf{x}^{n-1} + \ldots + \mathbf{B}_n\right\} = 0 \ldots (22)$$

опредѣлитъ безчисленное множество группъ о n точкахъ на прямой L, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ λ. Въ каждой изъ этихъ группъ одна какая нибудь точка опредѣляетъ величину λ, а слѣдовательно и $n-1$ остальныхъ точекъ, такъ что точки одной и той-же группы находятся между собой въ такой зависимости, что положеніе

одной изъ нихъ опредѣляетъ положеніе всѣхъ остальныхъ точекъ той-же группы.

Безчисленное множество группъ точекъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ λ составляютъ **инволюцію n-го порядка** (*) и изъ выше-сказаннаго видно, что инволюція эта опредѣляется двумя ея группами; ибо, предполагая, что двѣ группы даны уравненіями (20) и (21), каждая третья группа инволюціи опредѣлится уравненіемъ (22). Очевидно, что условіе того, что группы точекъ на прямой составляютъ инволюцію nго порядка можетъ быть представлено также въ формѣ

$$\left\{\mathbf{A}_0\xi^n + \mathbf{A}_1\xi^{n-1} + \ldots + \mathbf{A}_n\right\} + \lambda\left\{\mathbf{B}_0\xi^n + \mathbf{B}_1\xi^{n-1} + \ldots + \mathbf{B}_n\right\} = 0, \ldots (23)$$

гдѣ ξ — величина, опредѣляющая положеніе какой-нибудь точки прямой L по отношенію къ двумъ постояннымъ точкамъ той-же прямой.

Предполагая въ уравненіи (22) $n = 2$ мы получимъ уравненіе того-же вида, какъ и уравненіе (40 § 22), поэтому инволюція, разсмотрѣнная въ главѣ II можетъ быть названа инволюціей 2-го порядка.

Если въ уравненіи (22) $n = 1$, то оно опредѣлитъ рядъ точекъ на прямой L; поэтому простой рядъ точекъ на прямой можно разсматривать какъ инволюцію перваго порядка.

Разсматривая въ уравненіи (22) λ какъ величину, опредѣляющую положеніе элементовъ нѣкотораго ряда точекъ H_1 а инволюцію какъ n—значный рядъ точекъ G_n, мы

(*) *Jonquières* — Généralisation de la théorie de l'involution. Vid Annali di Mathematica pura ed applicata T. II. Roma. an. 1859, p. 86.

видимъ, что ряды H_1 и G_n будутъ находиться въ одно n — значной зависимости. Поэтому изъ сказаннаго въ § 33 заключаемъ, что **въ инволюціи n-го порядка существуетъ $2(n-1)$ двойныхъ точекъ** т. е. существуетъ $2(n-1)$ такихъ группъ, изъ которыхъ каждая содержитъ одну двойную точку.

Если назовемъ черезъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \quad y_1, y_2, \ldots y_n, \quad z_1, z_2, \ldots z_n, \quad u_1, u_2, \ldots u_n$$

четыре группы инволюціи, соотвѣтствующія четыремъ значеніями λ

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \lambda_4$$

и черезъ

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \mu_4$$

гармоническіе центры перваго порядка этихъ группъ по отношенію къ какому нибудь полюсу p, то на основаніи свойствъ одно — n — значныхъ образовъ заключаемъ, что

$$(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Равенство это показываетъ, что **ангармоническое отношеніе четырехъ гармоническихъ центровъ перваго порядка четырехъ группъ инволюціи не зависитъ отъ положенія полюса.**

Анагармоническое отношеніе $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4)$ мы будемъ называть ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ группъ инволюціи.

Изъ послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что **рядъ гар-**

моническихъ центровъ перваго порядка всѣхъ группъ инволюціи по отношенію къ полюсу p проэктивенъ съ рядомъ гармоническихъ центровъ перваго порядка тѣхъ же группъ по отношенію къ другому полюсу p'.

Назовемъ чрезъ m гармоническій центръ r-го порядка нѣкоторой группы $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ инволюціи, опредѣляемой уравненіемъ (22), по отношенію къ полюсу p, тогда замѣчая, что

$$\Sigma(pa)_{n-r} = (-1)^{n-r} \frac{\mathbf{A}_{n-r} + \lambda \mathbf{B}_{n-r}}{\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{B}_0},$$

$$\Sigma(pa)_{n-r+1} = (-1)^{n-r+1} \frac{\mathbf{A}_{n-r+1} + \lambda \mathbf{B}_{n-r+1}}{\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{B}_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma(pa)_n = (-1)_n \frac{\mathbf{A}_n + \lambda \mathbf{B}_n}{\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{B}_0},$$

уравненіе (14) § 29 прійметъ видъ:

$$(\mathbf{A}_{n-r} + \lambda \mathbf{B}_{n-r}) \overline{pm}^r + (n-r+1)(\mathbf{A}_{n-r+1} + \lambda \mathbf{B}_{n-r+1}) \overline{pm}^{r-1} +$$

$$\ldots\ldots + \frac{(n-r+1)(n-r)\ldots(n-2r-2)}{1.2.3\ldots r}(\mathbf{A}_n + \lambda \mathbf{B}_n) = 0. \quad (24)$$

Откуда заключаемъ, что гармоническіе центры r-го порядка группъ инволюціи n-го порядка составляютъ инволюцію r-го порядка.

Изъ уравненій (22) и (24) видно, что каждому значенію λ соотвѣтствуетъ одна группа инволюціи n—го порядка и одна группа инволюціи r-го порядка, такъ что

каждыя двѣ группы этихъ инволюцій будутъ соотвѣтственны и слѣдовательно инволюціи будутъ находиться въ $n-r$-значной групповой зависимости и поэтому ангармоническое отношеніе четырехъ группъ одной инволюціи будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ группъ другой инволюціи.

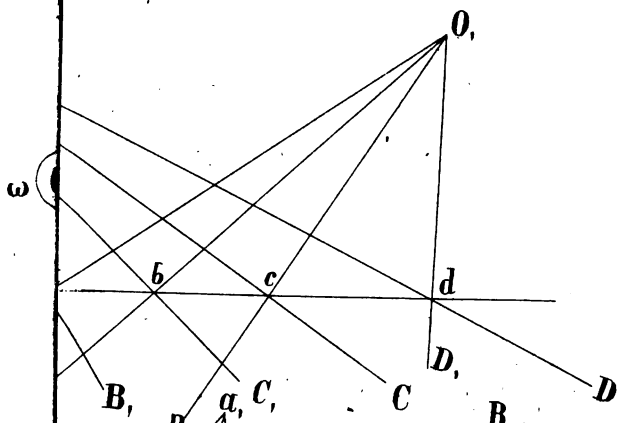
Двѣ инволюціи на одной и той-же или на двухъ различныхъ прямыхъ называютъ **проэктивными**, если равны ангармоническія отношенія четырехъ соотвѣтственныхъ группъ этихъ инволюцій. Въ этомъ случаѣ каждой группѣ одной инволюціи будетъ соотвѣтствовать группа элементовъ другой и поэтому обѣ инволюціи можно разсматривать какъ два образа, находящіеся въ $m-n$-значной групповой зависимости. Поэтому заключаемъ, что, **если на одной прямой находятся двѣ инволюціи одна m-го а другая n-го порядка, то существуетъ $m+n$ двойныхъ точекъ т. е. такихъ, изъ которыхъ каждая, разсматриваемая какъ точка первой инволюціи, совпадаетъ съ соотвѣтствующей точкой другой инволюціи.**

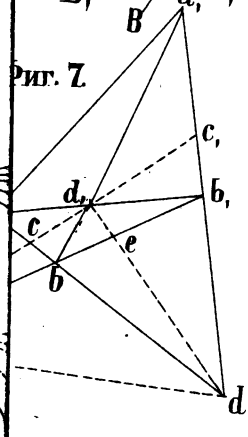
Если въ уравненіяхъ (22) и (23) будемъ разсматривать x и ξ, какъ величины, опредѣляющія положеніе лучей нѣкотораго пучка O, то группы лучей, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ λ, составятъ инволюцію n-го порядка и очевидно, что для инволюціи лучей, мы получимъ предложенія аналогичныя выше найденнымъ. Тоже самое можетъ быть сказано и по отношенію къ инволюціи плоскостей пучка.

Возвращаясь теперь къ свойствамъ $m-n$-значныхъ образовъ, мы на основаніи сказаннаго въ настоящемъ § заключаемъ: 1) что, **если два образа G_1 и G_n находятся въ одно-n-значной зависимости, то группы элементовъ образа G_n составляютъ инволюцію n-го**

порядка. 2) что, если два образа G_m и G_n находятся въ $m-n$ — значной групповой зависимости, то группы элементовъ образа G_m составляютъ инволюцію m-го порядка а группы элементовъ образа G_n — инволюцію n-го порядка и обѣ эти инволюціи проэктивны.

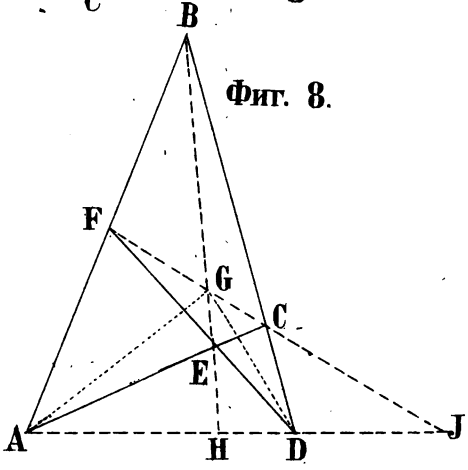
Фиг. 3.



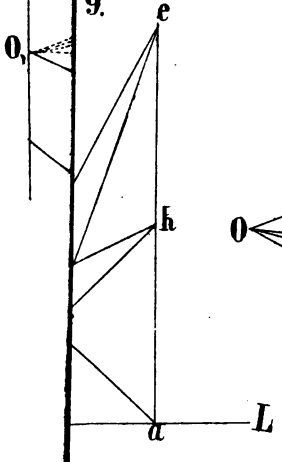


Фиг. 7.

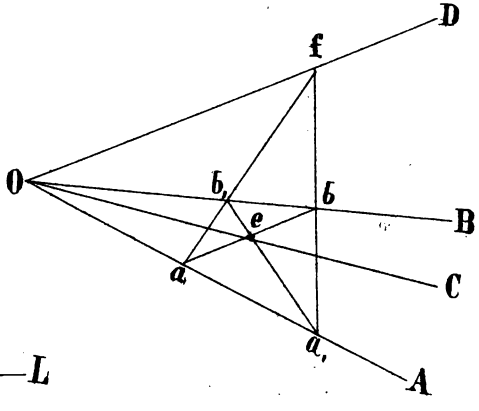
Фиг. 8.



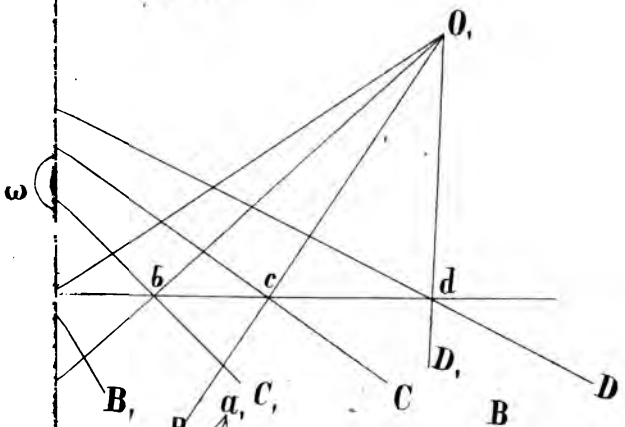
9.

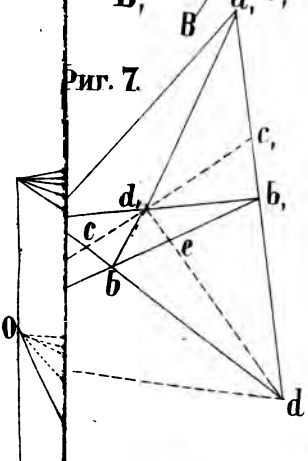


Фиг. 10.



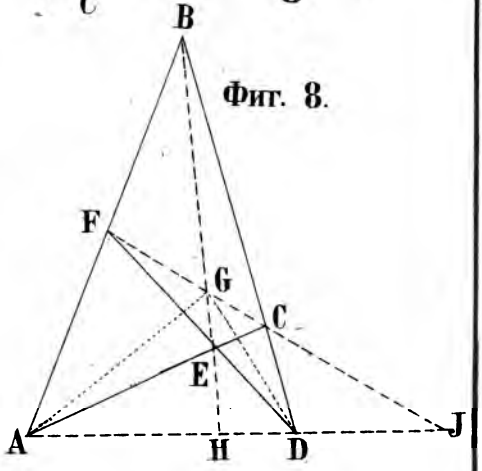
Фиг. 3.



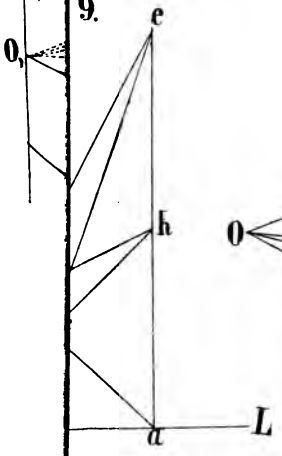


Фиг. 7.

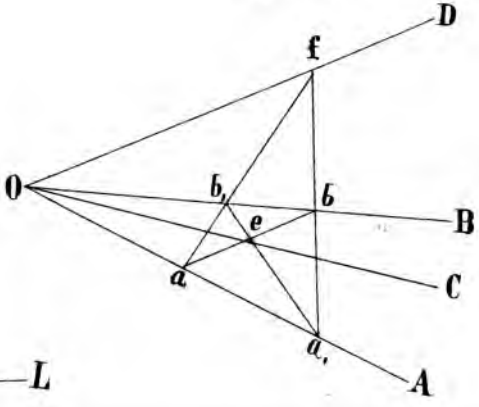
Фиг. 8.

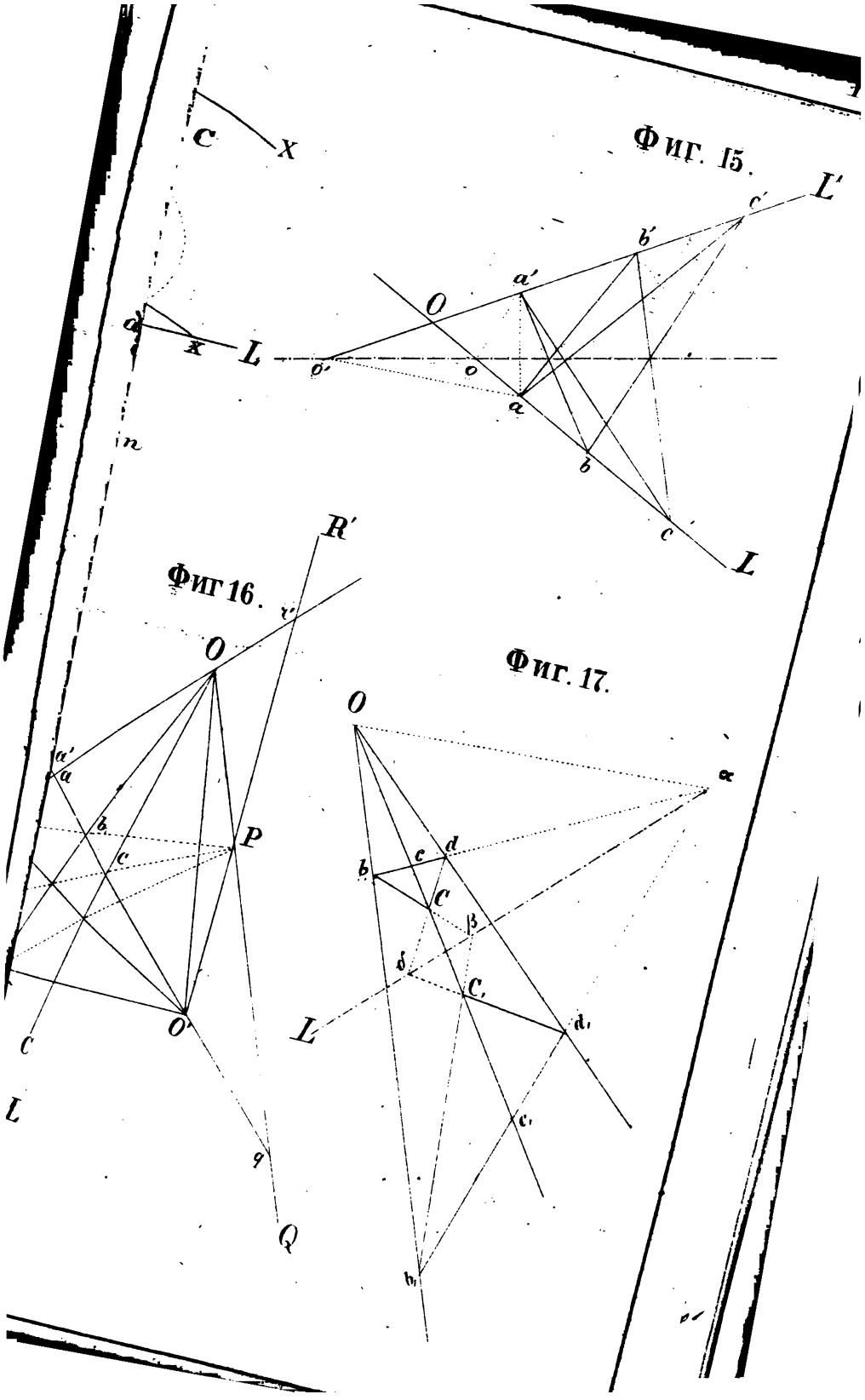


9.

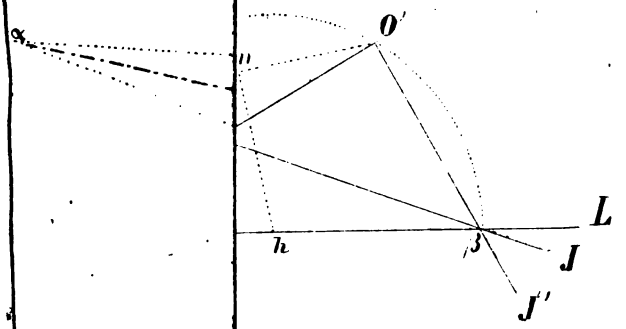


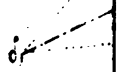
Фиг. 10.




Фиг. 15.
Фиг 16.
Фиг. 17.
C
X
L
L'
O
O'
P
Q
R'
L

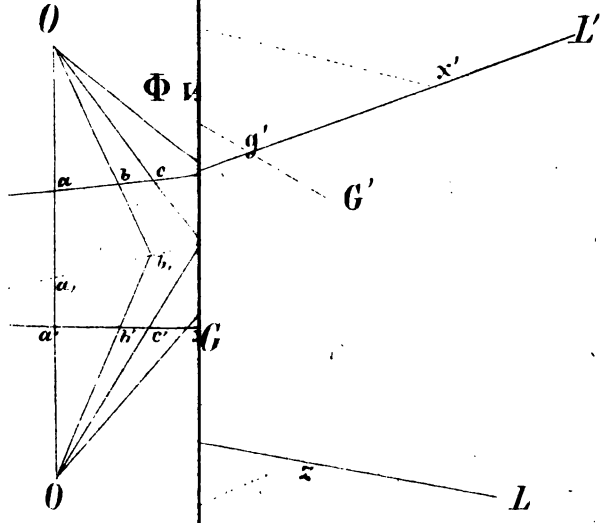
ис. 24.

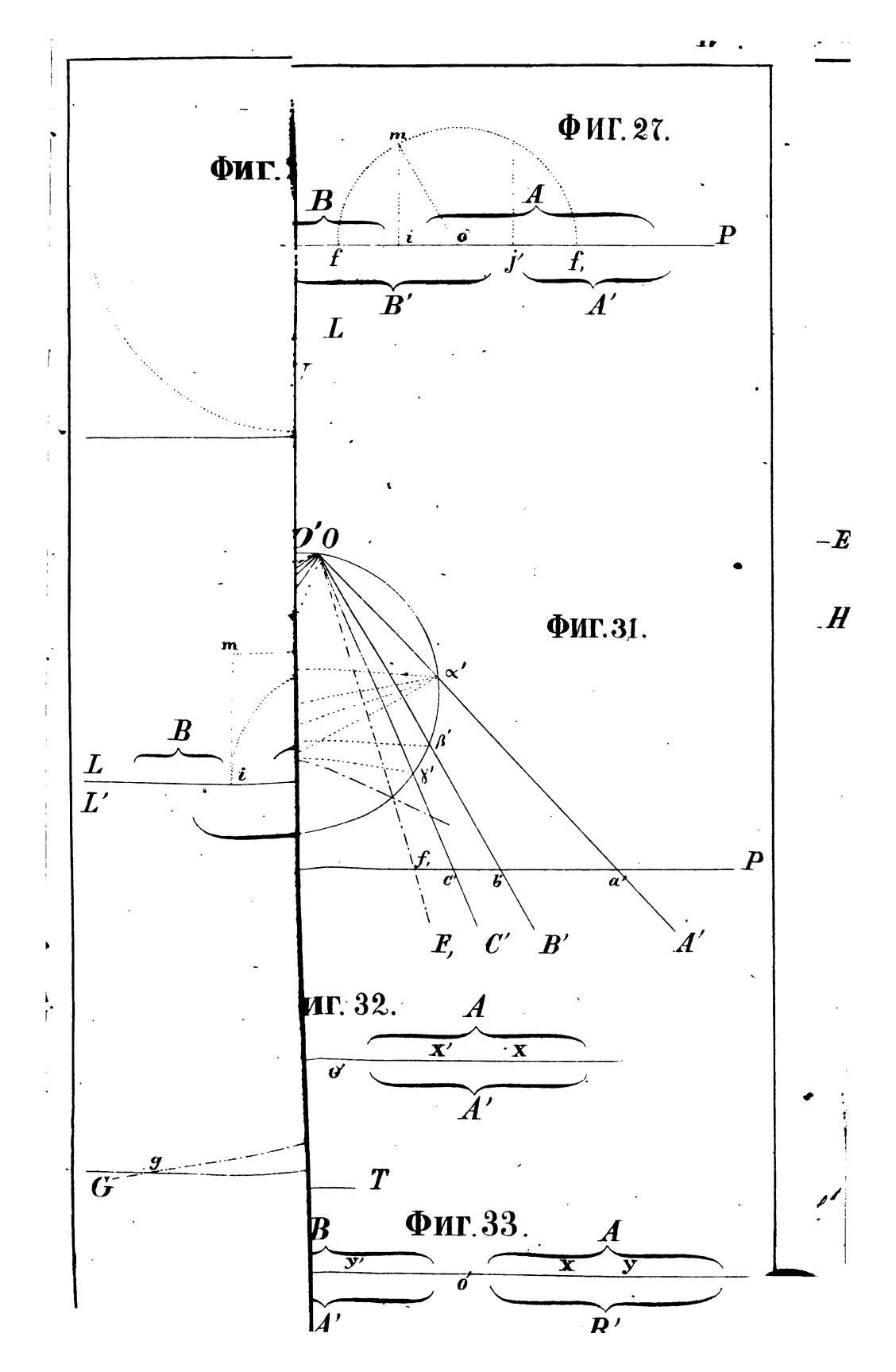




I'

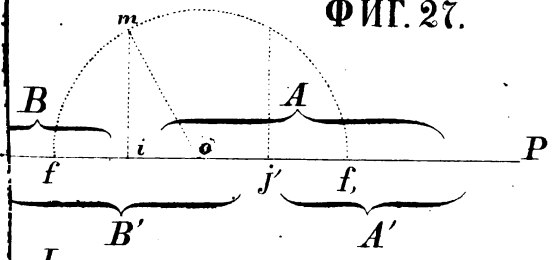
ис. 25.



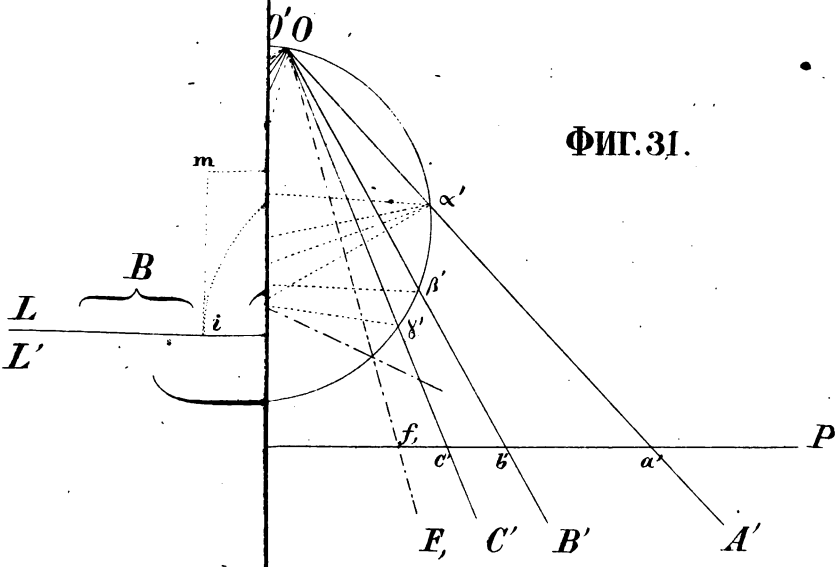

Фиг. 27.
m
B
A
i
o
P
f
j'
f,
B'
A'
L
Фиг. 31.
O'O
m
α'
B
β'
L
i
γ'
L'
f,
P
c'
b
a'
E,
C'
B'
A'
Фиг. 32.
A
x'
x
o'
A'
g
G
T
Фиг. 33.
B
A
y'
x
y
o'
A'
B'

Фиг.

Фиг. 27.

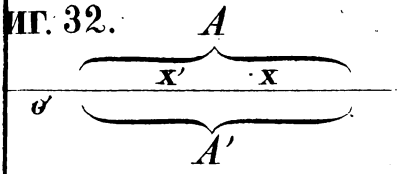


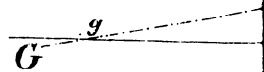
L



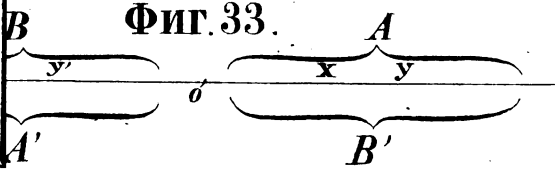
Фиг. 31.

Фиг. 32.



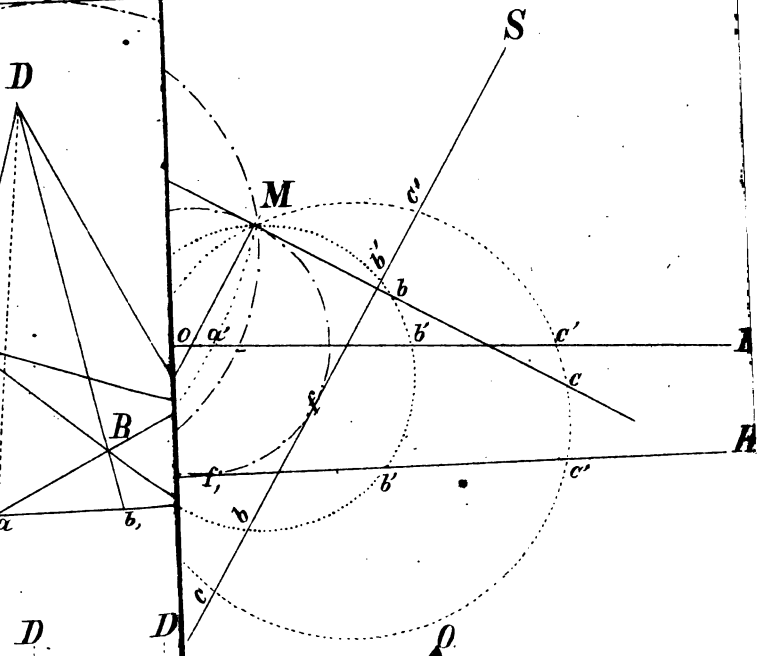


Фиг. 33.

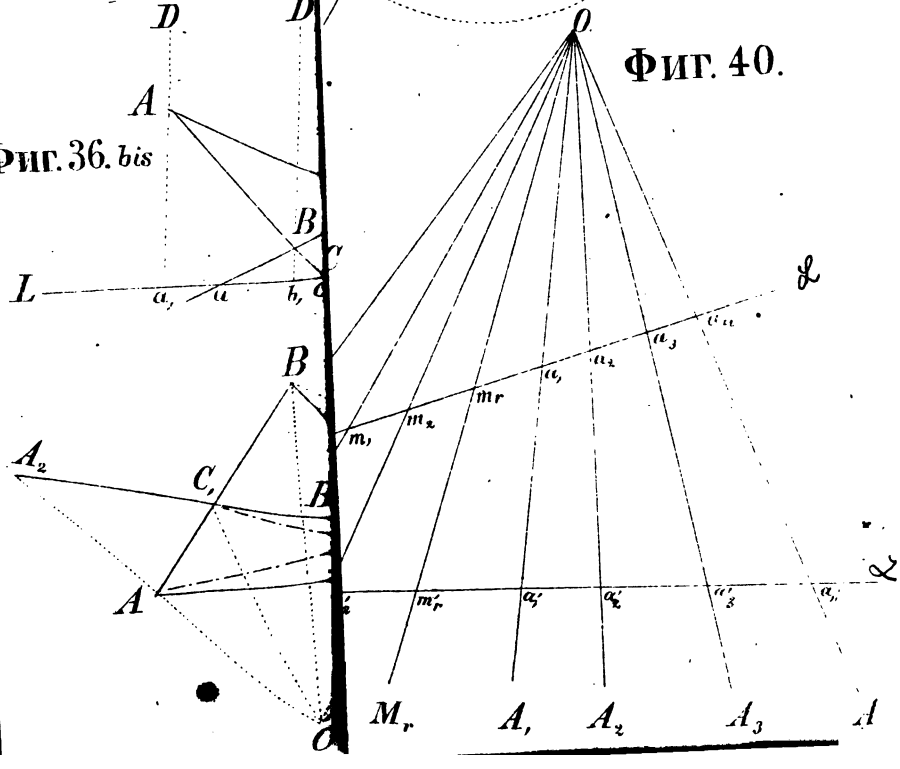


Фиг. 34

Фиг. 35.



Фиг. 36.

Фиг. 36. bis

Фиг. 40.